UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

ȘCOALA DOCTORALĂ ȘTIINȚE ALE NATURII

Cu titlu de manuscis

C.Z.U.: 512.548 (043.3)

ROTARI TATIANA

QUASIGRUPURI CU PARASTROFII DISTINCȚI ORTOGONALI

Teză de doctor în științe matematice

111.03 Logică matematică, algebră şi teoria numerelor

Conducător științific: P. Sîrbu ____________ **Sîrbu Parascovia,** conf. niv, dr. în științe fizico-matematice

Autor: T. Rotari ____________ **Rotari Tatiana**

CHIȘINĂU, 2026

CUPRINS

C.Z.U.: 512.548 (043.3)

ADNOTARE

la teza cu titlul **„Quasigrupuri cu parastrofii distincți ortogonali”,** înaintată de candidatul **Rotari Tatiana,** pentru conferirea titlului științific de doctor în științe matematice la specialitatea **111.03 – logică matematică, algebră și teoria numerelor.**

Chișinău, 2026

Structura tezei: teza este scrisă în limba română și cuprinde: introducere, patru capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie 162 de titluri și 5 anexe. Teza conține 112 pagini cu text de bază. Rezultatele obținute sunt publicate în 27 lucrări științifice cu volum total de circa 6,06 coli de autor.

Cuvinte-cheie: quasigrup n-ar, parastrof, quasigrup liniar, T-quasigrup, quasigrup (total) parastrofic-ortogonal, DC-quasigrup, $totCO$-quasigrup.

Scopul și obiectivele lucrării. Scopul tezei constă în obținerea unor caracterizări ale quasigrupurilor n-are ($n = 2, 3, 4$), ce posedă un număr maximal posibil de parastrofi distincți, în particular, a quasigrupurilor total parastrofic-ortogonale, precum și estimarea spectrului lor. Pentru atingerea scopului vizat sunt fixate următoarele obiective: studiul unor clase de quasigrupuri binare și n-are cu un număr dat de parastrofi distincți, inclusiv ortogonali; dezvoltarea unor metode de construcție a quasigrupurilor n-are parastrofic-ortogonale.

Noutatea și originalitatea științifică. În lucrare sunt introduse două clase noi de quasigrupuri binare: DC-quasigrupuri (cei șase parastrofi sunt distincți) și $totCO$-quasigrupuri (cei șase parastrofi sunt ortogonali). Problema existenței quasigrupurilor ce posedă un număr dat de parastrofi distincți și a caracterizării spectrului lor, formulată de Lindner și Steedly, este considerată pentru clasa n-quasigrupurilor liniare ($n = 2, 3, 4$), inclusiv cu sistemele maximale ortogonale de parastrofi distincți.

Problema științifică importantă soluționată constă în caracterizarea quasigrupurilor binare ce posedă 6 parastrofi distincți, respectiv 6 parastrofi ortogonali, în descrierea T-quasigrupurilor binare cu 1,2,3 sau 6 parastrofi distincți și a T-quasigrupurilor 4-are ce posedă numărul maximal de $1, 5, 10$ sau 20 de parastrofi distincți, inclusiv distincți și ortogonal, și estimarea spectrului lor.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele referitoare la T-formele n-T-quasigrupurilor cu un număr maximal dat de parastrofi distincți, inclusiv ortogonali, cât și metodele propuse de construcție a n-quasigrupurilor parastrofic-ortogonale, reprezintă contribuții la soluționarea problemelor deschise despre existența n-quasigrupurilor cu un număr dat de parastrofi distincți și spectrul n-quasigrupurilor parastrofic-ortogonale.

Implementarea rezultatelor științifice. Sistemele ortogonale de quasigrupuri n-are, $n \geq 2$, sunt utilizate cu succes la construirea MDS-codurilor, în criptografie, la planificarea experimentelor, în combinatorică ș.a. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în calitate de suport pentru cursuri universitare de specialitate.

C.Z.U.: 512.548 (043.3)

ANNOTATION

of the thesis entitled **"Quasigroups with orthogonal distinct parastrophes",** presented by the candidate **Rotari Tatiana,** for obtaining the degree of Doctor in Mathematical Sciences with specialty **111.03 Mathematical logic, algebra and number theory.**

Chișinău, 2026

Structure of the thesis: the thesis is written in Romanian and consists of an introduction, four chapters, general conclusions and recommendations, a bibliography of 162 titles and 5 appendices. The thesis contains 112 pages of basic text. The obtained results were published in 27 papers with a volume of over 6,06 sheets of author.

Keywords: n-quasigroup, parastrophe, linear quasigroup, T-quasigroup, (totally) parastrophic- orthogonal quasigroup, DC-quasigroup, $totCO$-quasigroup.

Research purpose and objectives: The purpose of the Thesis is to obtain characterizations of n-ary quasigroups ($n = 2, 3, 4$), which possess a maximal possible number of distinct parastrophes, in particular, maximal orthogonal sets of parastrophes, as well as to estimate their spectrum. To achieve the intended goal, the following objectives are set: the study of classes of binary and n-ary quasigroups with a given number of distinct parastrophes, including orthogonal ones; the development of methods for constructing parastrophic-orthogonal n-ary quasigroups.

Scientific novelty and originality: In the present Thesis, two new classes of binary quasigroups are introduced: DC-quasigroups (the six parastrophes are distinct) and totCO-quasigroups (the six parastrophes are orthogonal). The problem of the existence of quasigroups, which possess a given number of distinct parastrophes, and of the characterization of their spectrum, formulated by Lindner and Steedly, is considered for the class of linear n-quasigroups ($n = 2, 3, 4$), including with maximal systems of orthogonal distinct parastrophes.

The result obtained: consists in characterizing binary quasigroups possessing 6 distinct parastrophes, respectively 6 orthogonal parastrophes, in the description of binary and 4-ary T-quasigroups, possessing a given maximum number 1, 2, 3 or 6, and respectively, 1, 5, 10 or 20 of distinct parastrophes, including distinct and orthogonal parastrophes, and estimating their spectrum.

The theoretical significance and applicative value: The results concerning the T-forms of n-T-quasigroups with a given maximal number of distinct parastrophes, including orthogonal ones, as well as the proposed methods for constructing parastrophic-orthogonal n-quasigroups, represent contributions to the solution of open problems about the existence of n-quasigroups with a given number of distinct parastrophes and the spectrum of parastrophic-orthogonal n-quasigroups.

Implementation of the results: Orthogonal systems of n-quasigroups, $n \geq 2$, are used in the theory of MDS-codes, in criptography, planning experiments, in combinatorics etc. The results may be applied as a support for teaching courses in higher education.

УДК 512.548 (043.3)

АННОТАЦИЯ

Диссертация **«Квазигруппы, у которых различные парастрофы ортогональны»**, представленная **Ротарь Татианой** на соискание степени доктора математических наук наук по специальности – **111.03 Математическая логика, алгебра и теория чисел**

Кишинев, 2026

Структура диссертации: диссертация написана на румынском языке и состоит из введения, четырех глав, общих выводов и рекомендаций, библиографии из 162 названий и 5 приложений. Диссертация содержит 112 страниц основного текста. Полученные результаты опубликованы в 27-и научных работах с общим объёмом около 6,06 авторских листов.

Ключевые слова: n-квазигруппа, парастроф, линейная квазигруппа, T-квазигруппа, (тотально) парастрофно-ортогональная квазигруппа, DC-квазигруппа, totCO-квазигруппа.

Цель и задачи работы: Цель диссертации состоит в описании n-квазигрупп ($n = 2, 3, 4$), обладающих заданным числом различных парастрофов, в частности, максимальным ортогональным множествам парастрофов, а также оценить их спектр. Для достижения поставленной цели определены следующие задачи: изучение классов бинарных и n-арных квазигрупп с заданным числом различных парастрофов, включая ортогональных; разработка методов построения парастрофно-ортогональных n-квазигрупп.

Научная новизна и оригинальность: В диссертации вводятся и исследуются два новых класса квазигрупп: DC-квазигруппы и totCO-квазигруппы. Проблема существования квазигрупп, обладающих заданным числом различных парастроф, и описание их спектра, сформулированная Линднером и Стедли, зассматривается для класса линейных n-квазигрупп (n=2,3,4), в том числе обладающих ортогональной системой различных парастрофов.

Решенная научная проблема: состоит в описании бинарных квазигрупп, обладающих 6 различными парастрофами, соответственно 6 ортогональными парастрофами, описании бинарных и 4-арных T-квазигрупп, обладающих максимальным числом из 1, 2, 3 или 6 и, соответственно, из 1, 5, 10 или 20 различных парастрофов, в том числе различных и ортогональных парастрофов, и оценки их спектра.

Теоретическое значение и прикладная ценность работы: Результаты, касающиеся T-форм n-T-квазигрупп с заданным числом различных парастрофов, включая ортогональные, а также предложенные методы построения парастрофно-ортогональных n-квазигрупп, представляют собой вклад в решение открытых проблем существования n-квазигрупп с заданным числом различных парастрофов и описания спектра парастрофно-ортогональных n-квазигрупп.

Внедрение результатов. Ортогональные системы n-квазигрупп, $n \geq 2$, успешно применяются при построении MDS-кодов, в криптографии, при планировании экспериментов, в комбинаторике и т.д. Результаты могут быть применены для разработки специальных курсов в системе высшего образования.

LISTA ABREVIERILOR

S_n – grupul simetric de gradul n

A_n– grupul altern de gradul n

$\mathbb{Z}_n$ – inelul claselor de resturi modulo n

$\Sigma(A)$ – mulțimea celor șase parastrofi ai unui quasigrup binar (Q, A)

$Aut(G)$ – grupul automorfismelor grupului G

$|G: H|$ – indicele subgrupului H în grupul G

A^* – conjugata operației binare A

K_4 – grupul Klein de ordinul 4

$\perp \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ – sistemul de operații $A_1, A_2, \dots, A_n$ este ortogonal

$totCO$ −quasigrupuri – quasigrupuri binare total parastrofic-ortogonale

DC −quasigrupuri – quasigrupuri binare cu toți cei șase parastrofi distincți

INTRODUCERE

Noțiunea algebrică analogică celei de quasigrup își are originile în lucrările lui Anton K. Suschkewitsch, care a publicat în 1929 lucrări despre „generalizarea legii asociative" și a studiat sisteme binare neasociative [127]. Termenul „quasigrup" a fost introdus de către Ruth Moufang în anul 1935, care prin studiile sale asupra planelor desarguesiane a inițiat dezvoltarea teoriei quasigrupurilor ca domeniu al algebrei neasociative [86].

Conceptul de parastrof a fost introdus de A. Sade în anii 1950 [114]. Un quasigrup $n-$ar are (n+1)! parastrofi, iar unii dintre ei, sau chiar toți, pot să coincidă ca operații algebrice. C.C. Lindner și D. Steedley [76] au arătat că numărul exact de parastrofi distincți ai unui quasigrup binar divide 3! și că există quasigrupuri binare cu exact 1, 2, 3 sau 6 parastrofi distincți, caracterizând integral spectrul quasigrupurilor binare finite cu un număr exact dat de parastrofi distincți. Ulterior, M. McLeish [80] a generalizat acest rezultat în caz $n-$ar, arătând că numărul exact de parastrofi distincți ai unui quasigrup $n-$ar divide $(n+1)!$ și a studiat existența quasigrupurilor ternare cu un număr exact dat de parastrofi distincți. În legătură cu aceste aspecte apare problema caracterizării spectrului unor astfel de quasigrupuri. În caz ternar această problemă a fost soluționată complet pentru quasigrupurile finite cu exact 1, 3, 4, 6, 12 sau 24 de parastrofi distincți, și parțial pentru 2 sau 8 parastrofi distincți, de M. McLeish [80, 81]. M. McLeish a obținut de asemenea o serie de extimări ale spectrului quasigrupurilor de aritate arbitrară finită n, cu un număr exact dat de parastrofi distincți [80], însă caracterizarea completă a spectrului este în prezent nesoluționată.

Una din abordările utilizate la caracterizarea spectrului quasigrupurilor $n-$are finite cu un număr dat de parastrofi distincți constă în utilizarea în acest scop a quasigrupurilor liniare, în particular a $T-$quasigrupurilor. Astfel apare problema caracterizării quasigrupurilor liniare care au un număr exact dat de parastrofi distincți. Această problemă a fost soluționată în caz binar, pentru quasigrupurile liniare peste grupuri abeliene, de G. Belyavskaya și T. Popovich (Rotari) [19-21]. Este de menționat că M. McLeish a utilizat și quasigrupurile liniare pentru a demonstra existența și a caracteriza spectrul quasigrupurilor ternare cu un număr exact dat de parastrofi distincți. De exemplu, McLeish a demonstrat că un quasigrup ternar (Q, A), liniar peste un grup $(Q, +)$, este un $TS-$quasigrup dacă și numai dacă $A(x_1, x_2, x_3) = Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + c$, unde $Ix = -x, c \in Q$. Totuși, McLeish nu a prezentat astfel de caracterizări în cazul a k parastrofi distincți, pentru orice divizor k al numărului 24.

Ulterior, F. Sokhatsky și Y. Pirus [123, 124] au obținut caracterizări ale quasigrupurilor ternare (Q, A), $A(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c$, liniare peste un grup $(Q, +, 0)$, unde 0 este elementul neutru al grupului, α_i, $i = 1,2,3$, sunt bijecții pe mulțimea Q, cu condiția $\alpha_i 0 = 0, i = 1, 2, 3$, ce posedă cel mult un număr dat k de parastrofi distincți, unde k este divizor al numărului 24. În particular, F. Sokhatsky și Y. Pirus au obținut, independent, același rezultat ca și M. McLeish, referitor la quasigrupurile ternare liniare cu toți parastrofii egali între ei (TS −quasigrupuri). De asemenea, F. Sokhatsky și Y. Pirus au arătat că nu există quasigrupuri ternare liniare cu exact doi parastrofi distincți. Menționăm că rezultatele din [123, 124] nu se referă la maximumul exact k de parastrofi distincți ai quasigrupului dat, ci la cel mult k parastrofi distincți. În paragraful 2.3 al acestei teze, sunt prezentate condiții necesare și suficiente ca un T −quasigrup ternar să posede exact k parastrofi distincți, pentru fiecare $k \in \{3,4,6\}$.

Rămâne totuși deschisă problema caracterizării complete atât a spectrului quasigrupurilor ternare liniare cu un număr exact dat de parastrofi distincți, cât și caracterizarea quasigrupurilor liniare n-are cu un număr exact dat de parastrofi distincți ($n > 3$).

Un alt aspect studiat în acest context ține de caracterizarea spectrului quasigrupurilor n-are, parastrofii distincți ai cărora formează un sistem ortogonal. Problema ortogonalității operațiilor binare a apărut inițial în combinatorică (ortogonalitatea pătratelor latine) fiind impulsionată de cunoscuta ipoteză a lui Euler despre inexistența pătratelor latine ortogonale de ordinul $n \equiv 2 \ (mod\ 4)$ care a fost soluționată definitiv (negativ) de către R. C. Bose, S. S. Shrikhande și E. T. Parker în 1960 [39]. Soluția definitivă a ipotezei lui Euler arăta că există pătrate latine ortogonale de orice ordin $q \neq 1, 2, 6$. Este de menționat că, G. Tarry demonstrase anterior inexistența pătratelor latine ortogonale de ordinul 6 [136, 137]. Soluționarea acestei ipoteze a condus la apariția unor domenii noi de cercetare în combinatorică și algebră cum ar fi, de exemplu, teoria operațiilor ortogonale, dezvoltată inițial de T. Mann, V. Belousov, C. Stein, T. Evans ș.a. care, necesitând diverse metode de construcție, s-a dezvoltat în multiple direcții [1-11, 14, 15, 24-26, 34-38, 41, 43, 52-56, 58, 61, 62, 64, 65, 67, 68, 72, 74, 78, 79, 85, 87, 91, 92, 112, 113, 118, 119, 139, 140, 142-145, 148, 152].

O direcție aparte în teoria operațiilor ortogonale o reprezintă studiul ortogonalității parastrofilor unui quasigrup n-ar [12, 13, 16, 27-33, 40, 42, 44-51, 57, 63, 75, 84, 94, 115-117, 125, 126, 128-133, 147, 150, 151, 153, 158-162]. Quasigrupurile n-are care posedă seturi ortogonale din n parastrofi (parastrofi principali) se numesc quasigrupuri parastrofic-ortogonale (auto-ortogonale), iar quasigrupurile n-are, toți parastrofii distincți ai cărora formează un sistem ortogonal, se numesc quasigrupuri total parastrofic-ortogonale. În acest context, elaborarea metodelor de construcție a quasigrupurilor n-are parastrofic-ortogonale, respectiv total parastrofic-ortogonale, este un instrument eficient pentru caracterizarea spectrului unor astfel de quasigrupuri.

O problemă care apare în acest context este caracterizarea quasigrupurilor liniare ce posedă un număr exact dat de parastrofi distincți, inclusiv ortogonali [59, 70, 71, 93, 121-124, 149, 154].

O noțiune analogică celei de quasigrup total parastrofic-ortogonal, a apărut inițial în caz binar, fiind introdusă de autoarea tezei în colaborare cu G. Belyavskaya, unde quasigrupurile cu cei 6 parastrofi ortogonali au fost numite *totCO-quasigrupuri (total conjugate-orthogonal quasigroups)* [155-157]. Quasigrupurile ternare mediale parastrofic-ortogonale au fost studiate de I. Fryz și F. Sokhatsky [59, 121], care au stabilit condiții necesare și suficiente ca un quasigrup ternar medial să posede sisteme ortogonale, respectiv puternic ortogonale din șase (toți) parastrofi principali, și au demonstrat că, pentru orice $n > 3$, nu există quasigrupuri n-are mulțimea parastrofilor principali ai cărora formează un sistem puternic ortogonal.

Operațiile ortogonale, în particular quasigrupurile ortogonale (parastrofic-ortogonale, auto-ortogonale) au numeroase aplicări în criptografie, teoria codurilor, combinatorică ș. a. [34-36, 38, 60- 62, 66, 68, 69, 72, 73, 77, 82, 83, 88-90, 102, 103, 120, 138, 141, 144].

Scopul tezei constă în obținerea unor caracterizări ale quasigrupurilor $n-$are ($n = 2, 3, 4$), ce posedă un număr dat de parastrofi distincți, în particular ale quasigrupurilor total parastrofic-ortogonale, precum și estimarea spectrului acestor quasigrupuri.

Pentru realizarea scopului au fost formulate următoarele **obiective:**

- ✓ determinarea seturilor maximale de parastrofi distincți ai unui quasigrup $n-$ar ($n = 2, 3, 4$), utilizând subgrupurile grupului S_n;
- ✓ caracterizarea $T-$formei $T-$quasigrupurilor cu un număr exact dat de parastrofi distincți, inclusiv în cazul când aceștea formează un sistem ortogonal;
- ✓ obținerea unor estimări ale spectrului quasigrupurilor $n-$are finite ce au un anumit număr de parastrofi distincți ($n = 2, 3, 4$), inclusiv ortogonali.

Lucrarea este structurată în patru capitole, Introducere, Concluzii generale și recomandări, Bibliografie și 5 anexe.

În primul capitol este prezentată o analiză a rezultatelor cunoscute care se referă la tema tezei. Se arată că numărul maximal de parastrofi distincți ai unui quasigrup $n-$ar (Q, A) coincide cu indicele $|S_{n+1}: H|$ al subgrupului $\mathrm{H} = \{\sigma \in \mathrm{S}_{n+1} | \mathrm{A} = {}^{\sigma}\mathrm{A}\}$ în grupul S_{n+1}. Astfel, numărul maximal posibil de parastrofi distincți ai unui quasigrup $n-$ar este un divizor al numărului $(\mathrm{n}+1)!$, iar **s**eturile maximale de parastrofi distincți ale operației $n-$are de quasigrup A sunt seturile de reprezentanți ai claselor din mulțimea-factor, obținută la factorizarea grupului S_{n+1} prin H.

În acest capitol sunt date estimări ale spectrului quasigrupurilor binare și, respectiv ternare, cu un număr maximal fixat de parastrofi distincți. Se arată că există quasigrupuri binare care au exact k parastrofi pentru fiecare $k = 1, 2, 3$ sau 6, de orice ordin $n \geq 4$. În caz ternar se știe că există quasigrupuri ternare cu exact k parastrofi distincți, pentru fiecare $k \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, caracterizând integral spectrul lor în caz finit, pentru $k \in \{1, 3, 4, 6, 12, 24\}$ și parțial pentru $k = 2, 8$. Sunt date unele estimări ale spectrului și în caz n −ar [80, 81].

De asemenea, în acest compartiment sunt date seturile maximale posibile de parastrofi distincți ai unui quasigrup binar, respectiv ternar, și caracterizate quasigrupurile binare/ternare liniare, cu un număr maximal fixat de parastrofi distincți.

În ultimul paragraf al primului capitol este prezentată informația necesară din domeniul operațiilor n −are ortogonale, în particular, al quasigrupurilor n −are ortogonale. Este descrisă metoda de construcție a sistemelor ortogonale de quasigrupuri n −are finite, dată de T. Evans, care utilizează în acest scop sisteme ortogonale de quasigrupuri de aritate mai mică. Metoda dată de T. Evans arată existența sistemelor ortogonale din n quasigrupuri n −are finite ($n \geq 2$), de orice ordin $q \neq 1, 2, 6$.

În capitolul al doilea sunt prezentate rezultatele autoarei tezei, referitoare la quasigrupurile binare și, respectiv ternare, liniare peste grupuri, cu un număr maximal dat de parastrofi distincți.

În paragraful 2.1 sunt date caracterizări complete ale quasigrupurilor binare, liniare peste un grup, numărul maximal de parastrofi distincți ai cărora este 1, 2 sau 3. Sunt construite exemple de astfel de quasigrupuri și prezentate estimări ale spectrului lor. Se arată că:

a) există TS −quasigrupuri binare de orice ordin $q \geq 1$;

b) există quasigrupuri binare liniare finite, care au exact doi parastrofi distincți, de orice ordin primar $q > 3$;

c) există T-quasigrupuri binare finite, care au exact trei parastrofi distincți, de orice ordin $q > 2$.

Paragraful 2.2 este dedicat quasigrupurilor binare cu toți cei șase parastrofi distincți, numite DC − quasigrupuri [20, 95, 99, 107]. Se demonstrează că: DC − quasigrupurile sunt necomutative și netriviale; clasa DC −quasigrupurilor este închisă în raport cu transformarea de parastrofie; orice quasigrup netrivial ce este imagine omomorfică a unui DC −quasigrup este un DC − quasigrup; dacă un subquasigrup al unui quasigrup este DC − subquasigrup, atunci quasigrupul este DC −quasigrup. De asemenea, în acest paragraf este caracterizat complet spectrul DC −quasigrupurilor finite: se demonstrează că, există DC −quasigrupuri de ordinul q pentru orice $q \geq 4$. În particular, sunt caracterizate $DC - T -$quasigrupurile și se demonstrează că, pentru orice $q \geq 5,\ q \neq 6$, există $DC - T -$quasigrupuri de ordinul q.

În paragraful 2.3 sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T -$quasigrup ternar să posede exact k parastrofi distincti, unde $k = 3, 4$ sau 6. Sunt construite exemple de astfel de quasigrupuri și sunt date estimări ale spectrului lor. Se arată că:

a) există quasigrupuri ternare finite, cu exact trei parastrofi distinți, de orice ordin $q \geq 3$;

b) există $T -$quasigrupuri ternare finite, ce au exact 4 parastrofi distincți, de orice ordin impar $q \geq 3$;

c) există $T -$quasigrupuri ternare finite de ordin impar $q, (q, 3) = 1$, ce posedă exact șase parastrofi distincți.

Capitolul trei se referă la $T -$quasigrupurile 4-are cu un număr maximal dat de parastrofi distincți. Sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T -$quasigrup $4 -$ar să aibă exact 1, 5, 10 sau 20 de parastrofi distincți. Sunt prezentate unele estimări ale spectrului acestor quasigrupuri. De asemenea, în acest capitol se demonstrează că nu există $T -$quasigrupuri $4 -$are cu exact 2, 6 sau 15 parastrofi distincți.

În Capitolul patru sunt studiate quasigrupurile n-are parastrofic-ortogonale, inclusiv total parastrofic-ortogonale, $n = 2, 3, 4$. Sunt obținute caracterizări ale quasigrupurilor binare în care toți cei șase parastrofi formează un sistem ortogonal, numite $totCO -$quasigrupuri [18, 22, 23, 100]. În particular se arată că clasa $totCO -$quasigrupurilor este închisă în raport cu transformarea de parastrofie și sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T -$quasigrup binar să fie un $totCO -$quasigrup. De asemenea, sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T -$quasigrup ternar să aibă exact trei sau patru parastrofi distincți care formează un sistem ortogonal. Sunt prezentate estimări ale spectrului quasigrupurilor n-are parastrofic-ortogonale, $n = 2, 3, 4$, inclusiv a $totCO -$quasigrupurilor.

În ultimul paragraf al Capitolului 4, în baza metodei de construcție a sistemelor ortogonale de operații $n -$are, date de Trevor Evans, sunt prezentate construcții ale operațiilor k-are parastrofic-ortogonale, în particular auto-ortogonale, unde k are una din următoarele forme: $k = n^2, 2^n, mn$, pentru $n,\ m \geq 2$. Astfel se obține că, dacă pe o mulțime finită Q există quasigrupuri auto-ortogonale $m -$are și, respectiv $n -$are, unde $n,\ m \geq 2$, atunci pe această mulțime există quasigrupuri $\mathrm{mn} -$are auto-ortogonale. În particular, din această construcție rezultă că există quasigrupuri $2^{\mathrm{n}} -$are auto-ortogonale de orice ordin $q \neq 1, 2, 3, 6$, pentru orice $\mathrm{n} \geq 1$.

Lucrarea conține și 5 anexe ce includ subgrupurile grupului S_4 și subgrupurile de ordinul 24, 20, 12, 8 și 6, respectiv, ale grupului S_5, $T-$formele $T-$quasigrupurilor binare cu exact k parastrofi distincți și ortogonali, unde $k \in \{1, 2, 3, 6\}$, $T-$formele $T-$quasigrupurilor ternare cu exact k parastrofi distincți, unde $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, parastrofii $T-$quasigrupurilor ternare și, respectiv, $4-$are.

Rezultatele autoarei T. Rotari (T. Popovici) la tema tezei de doctorat au fost publicate în 27 de lucrări științifice [17-23, 95-101, 104-111, 134, 135, 155-157], inclusiv 10 articole (6 în reviste științifice de specialitate și 4 în culegeri de articole) și 17 rezumate ale comunicărilor la conferințe științifice de specialitate.

1. ANALIZA BIBLIOGRAFIEI ÎN DOMENIUL TEORIEI QUASIGRUPURILOR CU UN NUMĂR DAT DE PARASTROFI DISTINCȚI

1.1. Transformarea de parastrofie în quasigrupuri

Fie Q o mulțime nevidă și A o operație binară definită pe mulțimea Q.

Definiția 1.1.1. *Grupoidul binar (Q, A) se numește quasigrup, dacă ecuațiile $A(a, y) = b$, $A(x, a) = b$ au câte o singură soluție în Q, pentru orice $a, b \in Q$.*

În caz finit noțiunea de quasigrup reprezintă echivalentul algebric al celei de pătrat latin. Un pătrat latin de ordinul n, unde n este un număr natural nenul, este un tabel cu n linii și n coloane la intersecția cărora se află n elemente care se întâlnesc exact câte o singură dată în fiecare linie și în fiecare coloană.

Definiția 1.1.1. poate fi formulată echivalent în felul următor:

Definiția 1.1.2. *Un grupoid binar (Q, A) se numește quasigrup, dacă în egalitatea $A(x, y) = z$ oricare două dintre elementele x, y, z îl determină univoc pe al treilea.*

Ultima definiție sugerează modul de generalizare a noțiunii de quasigrup în caz $n-$ar $(n \geq 2)$.

Definiția 1.1.3. *Un grupoid $n-ar$ (Q, A) se numește quasigrup $n-ar$ (sau $n-quasigrup$) dacă în egalitatea $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}$ oricare n dintre elementele $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ îl determină univoc pe al $(n+1)-lea$.*

Definiția 1.1.4. *Fie (Q, A) un quasigrup $n-ar$ și fie $\sigma \in S_{n+1}$. Operația ${}^{\sigma}A$ definită de echivalența:*

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1} \Leftrightarrow {}^{\sigma}A\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = x_{\sigma(n+1)},$$

se numește $\sigma-parastrof$ sau, simplu, parastrof al quasigrupului (Q, A). Parastroful ${}^{\sigma}A$ se numește parastrof principal, dacă $\sigma(n+1) = n+1$.

Din definiția parastrofului rezultă că un quasigrup $n-$ar are $(n+1)!$ parastrofi. Menționăm că aceștea nu sunt neapărat distincți ca operații algebrice. Quasigrupurile $n-$are pentru care toți cei $(n+1)!$ parastrofi coincid se numesc quasigrupuri total-simetrice, sau TS-quasigrupuri.

Cei șase parastrofi ai unui quasigrup binar (Q, A) de obicei se notează în felul următor:

$$\Sigma(A) = \left\{A, A^{-1}, {}^{-1}A, {}^{-1}\left(A^{-1}\right), \left({}^{-1}A\right)^{-1}, A^{*}\right\},$$

unde

$$A(x,y)=z \Leftrightarrow A^{-1}(x,z)=y \Leftrightarrow {}^{-1}A(z,y)=x \Leftrightarrow A^{*}(y,x)=z.$$

Altă modalitate de notare a parastrofilor operației unui quasigrup binar (Q,A) este următoarea:

$$A^{-1}= {}^{r}A={}^{(23)}A, {}^{-1}A= {}^{l}A={}^{(13)}A, A^{*}= {}^{s}A={}^{(12)}A,$$

$${}^{-1}\left(A^{-1}\right) = {}^{lr}A={}^{(123)}A, \ \left({}^{-1}A\right)^{-1} = {}^{rl}A={}^{(132)}A,$$

unde $r=(23)$, $l=(13)$, $s=(12)$.

Lema 1.1.1. *Fie (Q, A) un quasigrup n −ar și* $H=\{\sigma\in S_{n+1} | A= {}^{\sigma}A\}$. *Atunci* $H\le S_{n+1}$.

Demonstrație. Fie $\sigma_1,\sigma_2\in H$, atunci $A={}^{\sigma_1}A$ și $A={}^{\sigma_2}A$, deci ${}^{\sigma_1\sigma_2}A={}^{\sigma_2}\left({}^{\sigma_1}A\right)={}^{\sigma_2}A=A$. De unde rezultă $\sigma_1\sigma_2\in H$. Din relația $A= {}^{\sigma}A$, obținem

$${}^{\sigma^{-1}}A={}^{\sigma^{-1}}(\,{}^{\sigma}A) \Leftrightarrow {}^{\sigma^{-1}}A=A \Rightarrow \sigma^{-1}\in H.$$

Prin urmare, $H\le S_{n+1}$. □

Lema 1.1.2. *Numărul maximal de parastrofi distincți ai unui quasigrup n-ar (Q, A) coincide cu indicele* $|S_{n+1}:H|$ *al subgrupului* $H=\{\sigma\in S_{n+1}|A= {}^{\sigma}A\}$ *în* S_{n+1}.

Demonstrație. Fie *(Q, A)*un quasigrup n −ar și fie $\tau\in H\beta$, unde $\beta\in S_{n+1}$. Atunci $\tau=\sigma\beta$ unde $\sigma\in H$. În baza definiției subgrupului H din Lema 1.1.1., obținem ${}^{\tau}A={}^{\sigma\beta}A={}^{\beta}(\,{}^{\sigma}A)={}^{\beta}A$ deci, $\forall\tau\in H\beta$, ${}^{\sigma}A= {}^{\beta}A$. Reciproc, dacă ${}^{\beta_1}A={}^{\beta_2}A$, atunci

$$A={}^{\beta_1^{-1}}\left({}^{\beta_2}A\right)={}^{\beta_2\beta_1^{-1}}A \Leftrightarrow \beta_2\beta_1^{-1}\in H \Leftrightarrow H\beta_1=H\beta_2,$$

deci β_1 și β_2 aparțin aceleași clase de rest modulo H. Prin urmare, numărul maximal de parastrofi distincți ai quasigrupului (Q,A) coincide cu numărul de clase de rest modulo H. □

Corolarul 1.1.1. *Numărul maximal posibil de parastrofi distincți ai unui quasigrup n-ar este* $(n+1)$!.

Într-adevăr, numărul maximal posibil de parastrofi distincți ai unui quasigrup este determinat de cel mai mic subgrup al grupului S_{n+1}, cel trivial, de ordinul 1. În baza Lemei 1.1.2, obținem $|S_{n+1}:H|=|S_{n+1}|:|H|=(n+1)!$. □

Corolarul 1.1.2. *Seturile maximale de parastrofi distincți ale operației n-are de quasigrup A sunt seturile posibile de reprezentanți ai claselor din* $(S_{n+1}/H)_d=\{H\beta|\beta\in S_{n+1}\}$.

Observăm că în acest context pot fi considerate și clasele de rest la stânga modulo H.

Lema 1.1.3. *Fie H_1 și H_2 două subgrupuri izomorfe ale grupului S_{n+1} și fie φ un izomorfism astfel încât $H_2 = \varphi(H_1)$. Dacă $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ este un set de reprezentanți în raport cu H_1, atunci $\varphi(\beta_1), \varphi(\beta_2), \dots, \varphi(\beta_k)$ este un set de reprezentanți în raport cu subgrupul H_2.*

Demonstrație. Considerăm subgrupurile izomorfe $H_1 \cong H_2$ și fie izomorfismul φ astfel încât $H_2 = \varphi(H_1)$, atunci $H_2\varphi(\beta) = \varphi(H_1)\varphi(\beta) = \varphi(H_1\beta)$, deci

$$S_{n+1}/H_2 = \{H_2\beta \mid \beta \in S_{n+1}\} = \{\varphi(H_1\beta) \mid \beta \in S_{n+1}\} = \{H_2\varphi(\beta) \mid \beta \in S_{n+1}\}. \ \square$$

Mulțimile posibile de parastrofi distincți și spectrul quasigrupurilor binare/ternare cu un număr exact dat de parastrofi distincți au fost studiate de C.C. Lindner, D. Steedly, M. McLeish, F. Sokhatsky, Y. Pirus ș.a. [76, 80, 81, 122-124].

Propoziția 1.1.1. *Mulțimea perechilor de parastrofi ai unui quasigrup binar (Q, A) se descompune în patru clase disjuncte, astfel încât egalitatea (inegalitatea) componentelor unei perechi dintr-o clasă implică egalitatea (inegalitatea) componentelor oricărei perechi din această clasă, și anume:*

I. $\left(A, {}^{(23)}A\right)$, $\left({}^{(12)}A, {}^{(132)}A\right)$, $\left({}^{(13)}A, {}^{(123)}A\right)$;

II. $\left(A, {}^{(13)}A\right)$, $\left({}^{(12)}A, {}^{(123)}A\right)$, $\left({}^{(23)}A, {}^{(132)}A\right)$;

III. $\left(A, {}^{(12)}A\right)$, $\left({}^{(23)}A, {}^{(123)}A\right)$, $\left({}^{(13)}A, {}^{(132)}A\right)$;

IV. $\left(A, {}^{(123)}A\right)$, $\left(A, {}^{(132)}A\right)$, $\left({}^{(13)}A, {}^{(23)}A\right)$, $\left({}^{(23)}A, {}^{(12)}A\right)$, $\left({}^{(123)}A, {}^{(132)}A\right)$, $\left({}^{(12)}A, {}^{(13)}A\right)$.

Demonstrație. Există 15 perechi neordonate de parastrofi ai unui quasigrup binar (Q, A). Prin simple verificări, se arată că egalitatea parastrofilor unei perechi dintr-o anumită clasă, implică egalitatea parastrofilor tuturor perechilor de parastrofi din această clasă. De exemplu, aplicând succesiv substituțiile (23), (13), (123), (132) și (12) asupra perechii de parastrofi $\left({}^{(13)}A, {}^{(123)}A\right)$ din clasa I transformarea ${}^{\tau}\left({}^{\sigma_1}A, {}^{\sigma_2}A\right) = \left({}^{\tau\sigma_1}A, {}^{\tau\sigma_2}A\right)$ și luând $\tau = (23)$, obținem perechile de parastrofi $\left({}^{(132)}A, {}^{(12)}A\right)$, $\left(A, {}^{(23)}A\right)$, $\left({}^{(23)}A, A\right)$, $\left({}^{(12)}A, {}^{(132)}A\right)$, $\left({}^{(123)}A, {}^{(13)}A\right)$ din aceași clasă I. Analog, conjugările pot fi aplicate celorlalte perechi din clasa I. Astfel, orice clasă indicată în propoziție este închisă în raport cu transformarea dată. □

În [76], autorii au demonstrat că există quasigrupuri binare care au exact k parastrofi pentru fiecare $k = 1, 2, 3$ sau 6, iar autoarea tezei în lucrările [17-23] caracterizează seturile posibile de parastrofi distincți ai unui quasigrup binar și forma operațiilor liniare de quasigrup, cu un număr exact dat de parastrofi distincți.

Fie (Q, A) un quasigrup binar. Considerăm mulțimea

$$T = \{A(x, A(x, y)) = y, \quad A(A(y, x), x) = y, \quad A(x, y) = A(y, x),$$
$$A(x, A(y, x)) = y, \; A(A(x, y), x) = y\},$$

formată din cinci identități de două variabile. Cu ajutorul identităților mulțimii T, în lucrarea [76] C.C. Lindner și D. Steedly au stabilit următoarele condiții în care are loc egalitatea anumitor parastrofi ai quasigrupului (Q, A):

1) dacă quasigrupul (Q, A) satisfăce toate identitățile mulțimii T, atunci țoți parastrofii quasigrupului (Q, A) coincid;
2) dacă quasigrupul (Q, A) satisfăce exact două dintre identitățile mulțimii T, atunci quasigrupul (Q, A) are exact doi parastrofi distincți;
3) dacă quasigrupul (Q, A) satisfăce exact o identitate dintre cele cinci identități ale mulțimii T, atunci quasigrupul (Q, A) are exact trei parastrofi distincți;
4) dacă quasigrupul (Q, A) nu satisfăce nici una dintre identitățile mulțimii T, atunci toți parastrofii quasigrupului (Q, A) sunt distincți.

Menționăm că în acest caz se consideră că, atunci când quasigrupul (Q, A) satisfăce exact k identități ale mulțimii T, nu vor fi satisfăcute celelalte identități ale mulțimii date. În lucrările [22, 98] este precizată dependența egalității parastrofilor unui quasigrup (Q, A) de identitățile mulțimii T, fiind redus numărul acestora la patru. După cum se demonstrează în [22], identitățile $A\big(x, A(y, x)\big) = y$ și $A(A(x, y), x) = y$ sunt echivalente și reprezintă legea semisimetriei. Acest fapt reiese și din faptul că perechile de parastrofi $({}^{(23)}A, {}^{(12)}A)$ și $(A, {}^{(123)}A)$ aparțin aceleeași clase IV. Din egalitatea ${}^{(23)}A(x, y) = {}^{(12)}A(x, y)$, în baza definiției parastrofilor respectivi, obținem:

$${}^{(23)}A(x, y) = {}^{(12)}A(x, y) \Leftrightarrow {}^{(23)}A(x, y) = A(y, x) \Leftrightarrow A\big(x, A(y, x)\big) = y.$$

Din egalitatea parastrofilor perechii $\left(A, {}^{(123)}A\right)$, obținem:

$$A(x, y) = {}^{(123)}A(x, y) \Leftrightarrow A(\, A(x, y), x) = y.$$

Deci, realizarea uneia dintre identități, implică realizarea celeilalte identități.

Considerăm mulțimea

$$\bar{T} = \{A(x, A(x, y)) = y, A(A(y, x), x) = y, A(x, y) = A(y, x), A(A(x, y), x) = y\}.$$

În conformitate cu [10, 93,114], vom numi aceste identități în felul următor:

$A(x, A(x, y)) = y$ - legea cheilor la stânga;

$A(A(y, x), x) = y$ - legea cheilor la dreapta;

$A(x, y) = A(y, x)$ - legea comutativă;

$A(A(x,y),x) = y$ - legea semisimetriei.

Realizarea uneia dintre aceste identități implică egalitatea perechilor de parastrofi ai uneia dintre clasele prezentate în Propoziția 1.1.1.

Propoziția 1.1.2. *Fie* (Q,A) *un quasigrup binar. Sunt adevărate afirmațiile:*

1) *Dacă quasigrup* (Q,A) *satisface legea cheilor la stânga, atunci are loc egalitatea componentelor perechilor de parastrofi din clasa I;*
2) *Dacă quasigrup* (Q,A) *satisface legea cheilor la dreapta, atunci are loc egalitatea componentelor perechilor de parastrofi din clasa II;*
3) *Dacă quasigrup* (Q,A) *satisface legea comutativă, atunci are loc egalitatea componentelor perechilor de parastrofi din clasa III;*
4) *Dacă quasigrup* (Q,A) *satisface legea semisimetriei, atunci are loc egalitatea componentelor perechilor de parastrofi din clasa IV.*

Demonstrație. Fie că quasigrupul (Q,A) satisfice legea cheilor la stânga, atunci din $A\big(x,A(x,y)\big) = y$, obținem $A(x,y) = {}^{(23)}A(x,y)$ ce implică egalitatea componentelor perechilor de parastrofi din clasa I. Invers, dacă are loc loc egalitatea componentelor perechilor de parastrofi din clasa clasa I, atunci $A(x,y) = {}^{(23)}A(x,y)$. Din definiția parastrofului ${}^{(23)}A(x,y)$, obținem $A\big(x,A(x,y)\big) = y$.

Analogic, dacă quasigrupul (Q, A) satisface legea cheilor la dreapta $A(A(y,x),x) = y$, atunci ${}^{(13)}A(y,x) = A(y,x) \Leftrightarrow {}^{(13)}A(x,y) = A(x,y)$, iar perechea de parastrofi $\left(A, {}^{(13)}A\right)$ aparține clasei II. Reciproc, dacă are loc egalitatea componentelor perechilor de parastrofi în clasa II, atunci considerând egalitatea parastrofilor perechii $\left({}^{(12)}A, {}^{(123)}A\right)$, adică ${}^{(12)}A(x,y) = {}^{(123)}A(x,y)$. Din definiția parastrofilor respectivi, avem

$$A(y,x) = {}^{(123)}A(x,y) \Leftrightarrow A(A(y,x),x) = y,$$

adică este satisfăcută legea cheilor la dreapta.

Admitem acum că quasigrupul (Q, A) satisface legea comutatică $A(x,y) = A(y,x)$, ceea ce implică $A(x,y) = {}^{(12)}A(x,y)$, adică are loc egalitatea parastrofilor unei perechi din clasa III, ceea ce implică egalitatea tuturor parastrofilor din această clasă. Reciproc, dacă are loc egalitatea componentelor perechiilor de parastrofi din clasa III, perechea $\left(A, {}^{(12)}A\right)$ implică direct legea comutativă.

Dacă quasigrupul (Q, A) satisface legea semisimetriei $A(A(x,y),x) = y$, atunci

$$A(x,y) = {}^{(13)}A(y,x) \Leftrightarrow A(x,y) = {}^{(13)}({}^{(12)}A(x,y)) \Leftrightarrow A(x,y) = {}^{(132)}A(x,y),$$

ce corespunde perechii de parastrofi $(A, {}^{(132)}A)$ din clasa IV. Reciproc, dacă are egalitatea componentelor perechilor de parastrofi clasei IV, atunci

$$A(x,y) = {}^{(123)}A(x,y) \Leftrightarrow A(A(x,y),x) = y. \ \square$$

Propoziția 1.1.3. *Orice două indentități ale mulțimii $\bar{\bar{T}}$ implică celelalte două.*

Demonstrație. 1) Fie că quasigrupul (Q, A) satisface legile cheilor la stânga și la dreapta, atunci are loc egalitatea componentelor perechilor de parastrofi din clasa I și clasa II. Egalitatea componentelor perechilor de parastrofi $\left(A, {}^{(23)}A\right)$ și $\left(A, {}^{(13)}A\right)$ implică egalitatea parastrofilor perechii $\left({}^{(23)}A, {}^{(13)}A\right)$ ce aparține clasei IV, deci are loc legea semisimetriei. Din egalitatea parastrofilor perechilor $({}^{(12)}A, {}^{(132)}A)$ din clasa I și $\left({}^{(23)}A, {}^{(132)}A\right)$, obținem $\left({}^{(12)}A, {}^{(23)}A\right) \Leftrightarrow \left(A, {}^{(12)}A\right)$ ce aparține clasei III, adică quasigrupul (Q, A) satisface și legea comutativă.

2) Fie că quasigrupul (Q, A) satisface legea cheilor la stânga și legea comutativă, atunci are loc egalitatea componentelor perechilor de parastrofi ale claselor I și III. Considerând perechile de parastrofi $\left(A, {}^{(23)}A\right)$ și $\left(A, {}^{(12)}A\right)$, obținem $\left({}^{(12)}A, {}^{(23)}A\right)$ ce aparține clasei IV, iar din $\left({}^{(12)}A, {}^{(132)}A\right)$ și $\left(A, {}^{(12)}A\right)$ reiese $\left({}^{(12)}A, {}^{(132)}A\right)$ ce aparține clasei a doua, adică sunt satisfăcute legea cheilor la dreapta și legea semisimetriei.

3) Fie că quasigrupul (Q, A) satisfacea legea cheilor la stânga și legea semisimetriei. Atunci are loc egalitatea parastrofilor perechilor claselor I și IV. Considerând $\left(A, {}^{(23)}A\right)$ din clasa I și $\left({}^{(12)}A, {}^{(23)}A\right)$ din clasa IV, obținem $\left(A, {}^{(12)}A\right)$ din clasa III, iar din perechile $\left({}^{(13)}A, {}^{(123)}A\right)$ din clasa I și $\left(A, {}^{(123)}A\right)$ din clasa IV, obținem $\left(A, {}^{(13)}A\right)$ din clasa II. Deci, quasigrupul satisface concomitent legea cheilor la dreapta și legea comutativă.

4) Fie că quasigrupul (Q, A) satisfacea legea cheilor la dreapta și legea comutativă. Atunci are loc egalitatea parastrofilor perechilor claselor II și III. Luând $\left(A, {}^{(13)}A\right)$ și $\left(A, {}^{(12)}A\right)$, avem $\left({}^{(13)}A, {}^{(12)}A\right)$ din clasa IV, deci este satisfăcută legea semisimetriei. Din $\left(A, {}^{(13)}A\right)$ și $\left({}^{(13)}A, {}^{(23)}A\right)$, obținem $\left(A, {}^{(23)}A\right)$ din clasa I, ceea ce implică realizarea legii cheilor la stânga.

5) Fie că quasigrupul (Q, A) satisfacea legea cheilor la dreapta și legea semisimetriei. Atunci are loc egalitatea parastrofilor perechilor claselor II și IV. Luând $\left(A, {}^{(13)}A\right)$ și $\left({}^{(13)}A, {}^{(12)}A\right)$,

obținem $\left(A, {}^{(12)}A\right)$ din clasa III, deci este satisfăcută legea comutativă. Din $\left(A, {}^{(13)}A\right)$ și $\left({}^{(13)}A, {}^{(23)}A\right)$, obținem $\left(A, {}^{(23)}A\right)$ din clasa I, ceea ce implică realizarea legii cheilor la stânga.

6) Fie quasigrupul (Q, A) satisfacea legea comutativă și legea semisimetriei. Atunci are loc egalitatea parastrofilor perechilor claselor III și IV. Din $\left(A, {}^{(12)}A\right)$ și $\left({}^{(13)}A, {}^{(12)}A\right)$, rezultă $\left(A, {}^{(13)}A\right)$ din clasa II, deci este satisfăcută legea cheilor la dreapta. Din $\left(A, {}^{(12)}A\right)$ și $\left({}^{(23)}A, {}^{(12)}A\right)$, obținem $\left(A, {}^{(23)}A\right)$ din clasa I, cee ace implică realizarea legii cheiilor la stânga.

□

Următoarea afirmație precizează rezultatul obținut de către C. C. Lindner și D. Steedly și descrie modalitatea de egalitate a parastrofilor în dependență de identitățile mulțimii $\overline{T}$.

Propoziția 1.1.4. *Fie (Q, A) un quasigrup, atunci:*

1) *dacă quasigrupul (Q, A) satisface exact două identități ale mulțimii $\overline{T}$, atunci toți parastrofii săi coincid;*
2) *dacă quasigrupul (Q, A) satisface identitatea A(A(x,y),x)=y, atunci (Q, A) are exact doi parastrofi distincți, și aceștea sunt $A(x,y)$ și ${}^{(12)}A(x,y)$;*
3) *dacă quasigrupul (Q, A) satisface exact una dintre identitățile A(x,A(x,y))=y, A(A(y,x),x)=y, A(x,y)=A(y,x), atunci (Q, A) are exact următorii trei parastrofi distincți A(x,y), ${}^{(123)}A(x,y)$, ${}^{(132)}A(x,y)$;*
4) *dacă quasigrupul (Q, A) nu satisfăce nici una dintre identitățile mulțimii $\overline{T}$, atunci toți parastrofii săi sunt distincți.*

Demonstrație. În baza Propoziției 1.1.3., dacă quasigrupul (Q, A) satisface exact două identități ale mulțimii $\overline{\mathrm{T}}$, atunci el satisfice toate identitățile acestei mulțimi, iar toate perechile de parastrofi în cele patru clase coincid. Prin urmare, toți parastrofii quasigrupului coincid, adică (Q, A) este un TS-quasigrup. Dacă quasigrupul (Q, A) satisfice exact identitatea $A(A(x, y), x) = y$, atunci parechile de parastrofi ce aparțin clasei IV coincid. Prin urmare,

$$A(x,y) = {}^{(123)}A(x,y) = {}^{(132)}A(x,y),$$
$${}^{(12)}A(x,y) = {}^{(13)}A(x,y) = {}^{(23)}A(x,y).$$

Deci, quasigrupul are exact doi parastrofi distincți, aceștea fiind $A(x,y)$ și ${}^{(12)}A(x,y)$.

Dacă quasigrupul satisface legea cheilor la stânga, atunci are loc egalitatea parastrofilor perechilor clasei I. Prin urmare, are loc egalitatea parastrofilor

$$A(x,y) = {}^{(23)}A(x,y), \qquad {}^{(12)}A(x,y) = {}^{(132)}A(x,y), \qquad {}^{(13)}A(x,y) = {}^{(123)}A(x,y).$$

Astfel, quasigrupul are trei parastrofi distincți.

Dacă quasigrupul satisface legea cheilor la dreapta, atunci are loc egalitatea componentelor perechilor clasei II. Prin urmare, are loc egalitatea parastrofilor:

$$A(x,y) = {}^{(13)}A(x,y), \qquad {}^{(12)}A(x,y) = {}^{(123)}A(x,y), \qquad {}^{(23)}A(x,y) = {}^{(132)}A(x,y),$$

quasigrupul având trei parastrofi distincți. Analog, dacă quasigrupul (Q, A) satisface legea comutativă, atunci are loc egalitatea parastrofilor perechilor clasei III, ceea ce implică egalitățile:

$$A(x,y) = {}^{(12)}A(x,y), \qquad {}^{(23)}A(x,y) = {}^{(123)}A(x,y), \qquad {}^{(13)}A(x,y) = {}^{(132)}A(x,y).$$

În așa mod, dacă quasigrupul (Q, A) satisface exact una dintre identitățile: legea cheilor la stânga, legea cheilor la dreapta sau legea comutativă, atunci quasigrupul (Q, A) are exact trei parastrofi distincți, un astfel de triplet fiind $A(x,y)$, ${}^{(123)}A(x,y)$, ${}^{(132)}A(x,y)$.

Dacă quasigrupul (Q, A) nu satisface nici una dintre identitățile mulțimii $\overline{\overline{\mathrm{T}}}$, atunci parastrofii în toate perechile celor patru clase sunt distincți, prin urmare, toți cei șase parastrofi ai quasigrupului sunt distincți. □

1.2. Quasigrupuri ternare cu un număr exact dat de parastrofi distincți

În 1976 M. E. McLeish, în teza sa de doctorat ,,On *the Number of Conjugates of Ternary Quasigroups"*, a prezentat următoarele rezultate:

1) numărul de parastrofi distincți ai unui quasigrup n −ar este divizor al numărului $(n+1)!$;
2) studiul mulțimilor de parastrofi distincți ai unui quasigrup ternar conduce la seturi de identități în acest quasigrup, indicând aceste seturi;
3) există quasigrupuri ternare cu exact k parastrofi distincți, pentru fiecare $k \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, caracterizând integral spectrul lor în caz finit, pentru fiecare $k \in \{1, 3, 4, 6, 12, 24\}$ și parțial pentru $k \in \{2, 8\}$. De asemenea, M.E. McLeish a obținut o serie de estimări ale spectrului quasigrupurilor n −are finite cu un număr exact dat de parastrofi distincți. Rezultatele obținute de McLeish sunt date în următoarele propoziții.

Propoziția 1.2.1. [80] *Fie (Q, A) un quasigrup ternar finit de ordinul q. Sunt adevărate afirmațiile:*

1) Există TS-quasigrupuri ternare de orice ordin $q \geq 1$;

2) Există quasigrupuri ternare cu exact 3 sau exact 4 parastrofi distincți de orice ordin $q \geq 3$;

3) Există quasigrupuri ternare cu exact 6, exact 12 sau exact 24 parastrofi distincți de orice ordin $q \geq 4$;

4) Există quasigrupuri ternare cu exact 2 sau exact 8 parastrofi distincți de ordinul q, unde $q \equiv 0\ (mod\ 8), q \equiv 0$ *sau* $5\ (mod\ 10), q \equiv 4, 8$ *sau* $10\ (mod\ 12)$, *pentru* $q \geq 5$.

Propoziția 1.2.2. [80] *Fie (Q, A) un quasigrup n-ar finit de ordinul q. Sunt adevărate afirmațiile:*

1) Există TS-quasigrupuri n-are de orice ordin $q \geq 1$;

2) Există quasigrupuri n-are cu exact (n+1)! parastrofi distincți de orice ordin $q > 4(n-1)^2$;

3) Există numărul întreg $q(j,n)$ *astfel încât pentru orice* $q \geq q(j,n)$ *există quasigrupuri n-are de ordinul q cu exact* $\frac{(n+1)!}{j!}$, *j=1, …, n, parastrofi distincți;*

4) Există quasigrupuri n-are (n> 3) *de ordinul q cu exact* $\frac{n(n+1)}{2}$ *parastrofi distincți*;

5) Dacă $q \geq 3$ *și* $n \geq 3$ *este impar, atunci există quasigrupuri n-are de ordinul q cu exact*

$$\frac{(n+1)!}{2\cdot\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)!\right]^2}$$

parastrofi distincți;

6) Dacă $q \geq 3$ *și* n *este par, atunci există quasigrupuri n-are de ordinul q cu exact*

$$\frac{(n+1)!}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2\cdot\frac{n+2}{2}}$$

parastrofi distincți.

În [80, 81] M. E. McLeish a studiat mulțimile posibile de parastrofi distincți ai unui quasigrup ternar, utilizând setul de identități $A = {}^{\sigma_i}A, i = \overline{1,24}$, în acest quasigrup, notându-le respectiv cu L_i, $i = \overline{1,24}$, unde $\sigma_1 = (34)$, $\sigma_2 = (12)$, $\sigma_3 = (12)(34)$, $\sigma_4 = (23), \sigma_5 = (14)$, $\sigma_6 = (14)(23)$, $\sigma_7 = (13)$, $\sigma_8 = (13)(24)$, $\sigma_9 = (24)$, $\sigma_{10} = (123)$, $\sigma_{11} = (132)$, $\sigma_{12} = (124)$, $\sigma_{13} = (142)$, $\sigma_{14} = (134)$, $\sigma_{15} = (143)$, $\sigma_{16} = (243)$, $\sigma_{17} = (234)$, $\sigma_{18} = (1432)$, $\sigma_{19} = (1423)$, $\sigma_{20} = (1234), \sigma_{21} = (1243)$, $\sigma_{22} = (1342), \sigma_{23} = (1324)$, $\sigma_{24} = \varepsilon$.

Lema 1.2.1. [80] *Fie* (Q,A) *un quasigrup ternar. Sunt adevărate afirmațiile:*

1) (Q,A) *este un* $TS-$*quasigrup dacă și numai dacă verifică toate cele 24 de identități;*

2) (Q,A) *are exact doi parastrofi distincți dacă și numai dacă verifică setul de identități*

$$\Sigma_2 = \{ L_3, L_6, L_8, L_{10}, L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{15}, L_{16}, L_{17}, L_{24}\};$$

3) (Q,A) *are exact trei parastrofi distincți dacă și numai dacă verifică unul dintre seturile de identități*

$$\Sigma_3^1 = \{L_1, L_2, L_3, L_6, L_8, L_{19}, L_{23}, L_{24}\}, \qquad \Sigma_3^2 = \{L_3, L_4, L_5, L_6, L_8, L_{21}, L_{22}, L_{24}\},$$

$$\Sigma_3^3 = \{L_3, L_6, L_7, L_8, L_9, L_{18}, L_{20}, L_{24}\};$$

4) (Q,A) *are exact patru parastrofi distincți dacă și numai dacă verifică unul dintre seturile de identități*

$$\Sigma_4^1 = \{L_2, L_4, L_7, L_{10}, L_{11}, L_{24}\}, \qquad \Sigma_4^2 = \{L_1, L_5, L_7, L_{14}, L_{15}, L_{24}\},$$
$$\Sigma_4^3 = \{L_2, L_5, L_9, L_{12}, L_{13}, L_{24}\}, \qquad \Sigma_4^4 = \{L_1, L_4, L_9, L_{16}, L_{17}, L_{24}\};$$

5) (Q,A) *are exact șase parastrofi distincți dacă și numai dacă verifică unul dintre seturile de identități*

$$\Sigma_6^1 = \{L_3, L_6, L_8, L_{24}\},\ \Sigma_6^2 = \{L_8, L_{18}, L_{20}, L_{24}\},\ \Sigma_6^3 = \{L_3, L_{19}, L_{23}, L_{24}\},$$
$$\Sigma_6^4 = \{L_6, L_{21}, L_{22}, L_{24}\}, \qquad \Sigma_6^5 = \{L_1, L_2, L_3, L_{24}\},$$
$$\Sigma_6^6 = \{L_4, L_5, L_6, L_{24}\}, \qquad \Sigma_6^7 = \{L_7, L_8, L_9, L_{24}\};$$

6) (Q,A) *posedă exact opt parastrofi distincți dacă și numai dacă verifică unul dintre seturile de identități:*

$$\Sigma_8^1 = \{L_{10}, L_{11}, L_{24}\}, \Sigma_8^2 = \{L_{12}, L_{13}, L_{24}\}, \Sigma_8^3 = \{L_{14}, L_{15}, L_{24}\}, \Sigma_8^4 = \{L_{16}, L_{17}, L_{24}\};$$

7) *(Q, A) posedă exact doisprezece parastrofi distincți dacă și numai dacă este satisfăcută o singură identitate* $L_i,\ i = \overline{1,9}$ *și nu este satisfăcută nici una dintre celelalte identități, excepție făcând identitatea* L_{24};

8) (Q,A) *are toți cei 24 de parastrofi distincți doi câte doi dacă și numai dacă nu verifică nici una din identitățile* $L_i,\ i = \overline{1,24}$.

Pentru determinarea spectrului quasigrupurilor ternare cu un număr maximal dat de parastrofi distincți, McLeish a utilizate diverse scheme-blok, precum și unele operații liniare definite pe inelul claselor de resturi $\mathbb{Z}_n$. De exemplu, pentru a demonstra inexistența quasigrupurilor ternare liniare peste inelul $\mathbb{Z}_n$, McLeish arată că verificarea unor identități din acest set implică alte identități ce nu aparțin setului dat, obținând astfel contradicții. De asemenea, McLeish explică faptul că anume acest tip de quasigrupuri ternare cu exact doi parastrofi distincți nu există și nu exclude existența unor quasigrupuri ternare de alte tipuri cu exact doi parastrofi distincți. McLeish utilizează aceleași tehnici și la caracterizarea spectrului quasigrupurilor ternare cu exact 8 parastrofi distincți [81]. Prin metode algebrice nu a fost posibilă caracterizarea spectrului quasigrupurilor ternare cu exact 2 sau exact 8 parastrofi distincți, însă prin unele construcții combinatorice au fost obținute estimări ale spectrului acestor quasigrupuri.

F. Sokhatsky și Y. Pirus în [123, 124] au obținut caracterizări ale quasigrupurilor ternare (Q,A), $A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c$, liniare peste un grup $(Q,+,0)$, unde 0 este elementul neutru al grupului, α_i, $i = 1,2,3$, sunt bijecții pe mulțimea Q, cu condiția $\alpha_i 0 = 0, i = 1,2,3$, ce posedă cel mult k parastrofi distincți, unde k este divizor al numărului 24. Aceste rezultate sunt prezentate în următoarea afirmație.

Propoziția 1.2.3. [124] *Fie* $(Q, f), f(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c$, *un quasigrup ternar liniar peste qrupul* $(Q, +, 0)$, *unde* $c \in Q$ *și bijecțiile* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *ale mulțimii Q verifică condițiile* $\alpha_i 0 = 0, i = 1, 2, 3$. *Atunci:*

1) *quasigrupul* (Q, f) *este un TS-quasigrup (are un singur parastrof distinct), dacă și numai dacă operația f are forma* $f(x, y, z) = -x - y - z + c$;
2) *nu există quasigrupuri ternare liniare de acest tip, care au exact doi parastrofi distincți;*
3) *quasigrupul ternar* (Q, f) *are maximum trei parastrofi distincți dacă și numai dacă operația f are forma* $f(x, y, z) = \alpha x + \alpha y - z + a$, *unde* α *este un automorfism al grupul* $(Q, +, 0)$ *și* $\alpha a = -a$;
4) *quasigrupul ternar* (Q, f) *are maximum patru parastrofi distincți dacă și numai dacă există grupul abelian (Q, +, 0), bijecția* $\alpha: Q \to Q$, *și elementul* $a \in Q$, *astfel încât* $\alpha 0 = 0$ *și* $f(x, y, z) = \alpha x + \alpha y + \alpha z + a$;
5) *quasigrupul ternar* (Q, f) *are maximum șase parastrofi distincți dacă și numai dacă este satisfăcută una din condițiile:*
   a) *există grupul abelian* $(Q, +, 0)$, *automorfismul acestuia* α *și elementul* $a \in Q$, *astfel încât* $\alpha^4 = \varepsilon$, $\alpha^3 a = -a$ *și* $f(x, y, z) = \alpha x + \alpha^3 y - \alpha^2 z + a$;
   b) *există grupul abelian* $(Q, +, 0)$, *automorfismele acestuia* α, β *și elementul* $a \in Q$, *astfel încât* $\alpha a = \beta a = -a, \beta\alpha = I_a \alpha\beta$ *și* $f(x, y, z) = -\beta\alpha x + \alpha y + \beta z + a$;
   c) *există grupul abelian* $(Q, +, 0)$, *permutarea acestuia* α *și elementul* $a \in Q$, *astfel încât* $\alpha 0 = 0$ *și* $f(x, y, z) = \alpha x + \alpha y - z + a$;
6) *quasigrupul ternar are maximum opt parastrofi distincți distincți dacă și numai dacă există grupul abelian (Q, +, 0), bijecția acestuia* α *și elementul* $a \in Q$, *astfel încât*
$$f(x, y, z) = \alpha x + \alpha y + \alpha z + a;$$
7) *quasigrupul ternar* (Q, f) *are maximum doisprezece parastrofi distincți dacă și numai dacă există automorfismul* β *al grupului (Q, +,0), bijecția acestuia* α *și un element* $a \in Q$, *astfel încât* $\beta^2 = \varepsilon, Ix = -x, \alpha 0 = 0, -\beta a = a$, *iar operația este*
$$(x, y, z) = \alpha x - \beta\alpha y + \beta z + a.$$

Observăm că p. 3) - 7) nu se referă la numărul exact de parastrofi distincți, adică maximumul atins de parastrofi distincți. De exemplu, dacă $\alpha = I$, atunci operația ia forma $f(x, y, z) = -x - y - z + c$, deci (Q, f) este un $TS-$quasigrup. În paragraful 2.3 al acestei teze sunt prezentate condiții necesare și suficiente ca un T-quasigrup ternar să posede exact k parastrofi distincți, pentru fiecare $k \in \{3, 4, 6\}$.

1.3. Quasigrupuri ortogonale. Metoda lui Evans de construcție a sistemelor ortogonale de quasigrupuri n −are

Amintim că un grupoid n −ar (Q, A) se numește n-quasigrup (sau quasigrup n-ar), dacă în egalitatea $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}$, fiecare n dintre elementele $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ determină univoc al $(n+1)$-lea element.

Definiția 1.3.1. *Operațiile n-are $A_1, A_2, \dots, A_n$, definite pe o mulțime Q, se numesc operații ortogonale dacă, pentru orice $a_1, a_2, \dots, a_n \in Q$, sistemul de ecuații*

$$\{A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_i\}_{i=1}^{n}$$

are o singură soluție în Q.

Definiția 1.3.2. *Un sistem de operații n-are $\{A_1, A_2, \dots, A_s\}$, unde $s \geq n$, definite pe o mulțime Q, se numește sistem ortogonal dacă orice n operații ale acestui sistem sunt ortogonale.*

Din definițiile de mai sus rezultă afirmațiile:

1) Sistemul de operații n-are $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, definite pe o mulțime Q, este ortogonal dacă și numai dacă este bijectivă aplicația:

$$\varphi: Q^n \to Q^n, \qquad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \big(A_1(x_1, \dots, x_n), \dots, A_n(x_1, \dots, x_n)\big);$$

2) Dacă $|\ Q\ | < \infty$, atunci sistemul de operații n-are $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, definite pe Q, este ortogonal, dacă și numai dacă are loc implicația:

$$\{A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_i(y_1, y_2, \dots, y_n)\}_{i=1}^{n} \Rightarrow \{x_i = y_i\}_{i=1}^{n} \tag{1.1}$$

Într-adevăr, dacă $|\ Q\ | < \infty$, și are loc implicația (1.1), atunci aplicația

$$\varphi: Q^n \to Q^n, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \Big(A_1(x_1, \dots, x_n), \dots, A_n(x_1, \dots, x_n)\Big),$$

va fi injectivă, deci și bijectivă. □

Propoziția 1.3.1. [58] *Dacă A și B sunt operațiii binare de quasigrup, definite pe o mulțime Q, atunci operația ternară C definită pe Q în felul următor:*

$$C(x, y, z) = A\big(x, B(y, z)\big),$$

pentru orice $x, y, z \in Q$, este o operație de quasigrup.

Demonstrație. Observăm că

$$C(x, a, b) = d \ \Leftrightarrow\ A\big(x, B(a, b)\big) = d \ \Leftrightarrow\ x = {}^{-1}A\big(d, B(a, b)\big) \in Q,$$

Deci ecuația $C(x, a, b) = d$ are soluție unică. Considerăm ecuația:

$$C(a, x, b) = d \ \Leftrightarrow\ A\big(a, B(x, b)\big) = d \ \Leftrightarrow\ A^{-1}(a, d) = B(x, b)$$

Deoarece (Q, B) este un quasigrup, rezultă că există un singur $x = {}^{-1}B(A^{-1}(a, d), b) \in Q$. Considerăm acum următoarea ecuație:

$$C(a, b, x) = d \;\Leftrightarrow\; A\big(a, B(b, x)\big) = d \;\Leftrightarrow\; A^{-1}(a, d) = B(b, x).$$

Deoarece (Q, B) este un quasigrup, rezultă că există un singur element $x = B^{-1}\big(b, A^{-1}(a, d)\big) \in Q$. Prin urmare, (Q, C) este un quasigrup ternar. □

Propoziția 1.3.2. [58] *Fie* $\{A_1, A_2\}$ *și* $\{B_1, B_2\}$ *două perechi ortogonale de quasigrupuri binare, definite pe mulțimea* Q, $|Q| < \infty$. *Atunci este ortogonal sistemul de quasigrupuri ternare* $\{C_1, C_2, C_3\}$, *unde,* $\forall x, y, z \in Q$,

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) &= A_1\big(x, B_1(y, z)\big), \\ C_2(x, y, z) &= A_2\big(x, B_1(y, z)\big), \\ C_3(x, y, z) &= A_1\big(x, B_2(y, z)\big). \end{aligned}$$

Demonstarție. Fie că sistemul $\{C_1, C_2, C_3\}$ are două soluții:

$$\begin{cases} C_1(x, y, z) = C_1(x', y', z') \\ C_2(x, y, z) = C_2(x', y', z') \\ C_3(x, y, z) = C_3(x', y', z') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1\big(x, B_1(y, z)\big) = A_1\big(x', B_1(y', z')\big) \\ A_2\big(x, B_1(y, z)\big) = A_2\big(x', B_1(y', z')\big) \\ A_1\big(x, B_2(y, z)\big) = A_1\big(x', B_2(y', z')\big) \end{cases}$$

Deoarece sistemul $\{A_1, A_2\}$ este ortogonal, obținem:

$$\begin{cases} x = x' \\ B_1(y, z) = B_1(y', z') \\ B_2(y, z) = B_2(y', z') \end{cases}$$

Sistemul $\{B_1, B_2\}$ este și el ortogonal, deci:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

În concluzie am obținut că soluția este unică, astfel sistemul $\{C_1, C_2, C_3\}$ este ortogonal. □

Observăm că, dacă la sistemul $\{C_1, C_2, C_3\}$ adăugăm operația ternară C_4, definită de egalitatea $C_4(x, y, z) = A_2\big(x, B_2(y, z)\big), \forall x, y, z \in Q$, atunci $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ este un sistem ortogonal de quasigrupuri 3-are.

Propoziția 1.3.3. [58] *Dacă* A, B *și* C *sunt trei operații binare de quasigrup, definite pe mulțimea* Q, *atunci operația 4-ară*

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4) = A\big(B(x_1, x_2), C(x_3, x_4)\big), \qquad \forall\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in Q$$

este o operație de quasigrup.

Propoziția 1.3.4. *Dacă* $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$ *și* $\{C_1, C_2\}$ *sunt trei perechi ortogonale de operații binare de quasigrup, definite pe* Q, *atunci* $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$, *unde*

$D_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = A_1\big(B_1(x_1, x_2), C_1(x_3, x_4)\big)$, $D_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = A_2\big(B_1(x_1, x_2), C_1(x_3, x_4)\big)$,
$D_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = A_1\big(B_2(x_1, x_2), C_2(x_3, x_4)\big)$, $D_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = A_2\big(B_2(x_1, x_2), C_2(x_3, x_4)\big)$,
formează un sistem ortogonal de quasigrupuri 4-are.

Propoziția 1.3.5. [58] *Fie Q o mulțime finită, $\{A_1, A_2\}$ o pereche ortogonală de quasigrupuri binare, definite pe mulțimea Q, și fie $\{B_1, \dots, B_m\}, \{C_1, \dots, C_m\}$ - sisteme ortogonale de quasigrupuri $m-$are definite pe Q. Atunci $\{D_{ij} \mid i = 1,2; j = \overline{1,m}\}$, unde*

$$D_{ij}(x_1^{2m}) = A_i\left(B_j(x_1^m), C_j(x_{m+1}^{2m})\right); \begin{matrix} i = 1,2 \\ j = \overline{1,m} \end{matrix}$$

$\forall x_1, \dots, x_{2m}$, este un sistem ortogonal de quasigrupuri $2m$- are.

Demonstrație. Fie că sistemul $\{D_{ij} \mid i = 1,2; j = \overline{1,m}\}$, are două soluții:

$$\begin{cases} D_{11}(x_1^{2m}) = D_{11}(y_1^{2m}) \\ \dots\dots \\ D_{2m}(x_1^{2m}) = D_{2m}(y_1^{2m}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1\big(B_1(x_1^m), C_1(x_{m+1}^{2m})\big) = A_1\big(B_1(y_1^m), C_1(y_{m+1}^{2m})\big) \\ A_2\big(B_1(x_1^m), C_1(x_{m+1}^{2m})\big) = A_2\big(B_1(y_1^m), C_1(y_{m+1}^{2m})\big) \\ \dots\dots \\ A_1\big(B_m(x_1^m), C_m(x_{m+1}^{2m})\big) = A_1\big(B_m(y_1^m), C_m(y_{m+1}^{2m})\big) \\ A_2\big(B_m(x_1^m), C_m(x_{m+1}^{2m})\big) = A_2\big(B_m(y_1^m), C_m(y_{m+1}^{2m})\big) \end{cases}$$

Deoarece sistemul $\{A_1, A_2\}$ este ortogonal, avem că:

$$\begin{cases} B_1(x_1^m) = B_1(y_1^m) \\ \dots\dots \\ B_m(x_1^m) = B_m(y_1^m) \\ C_1(x_{m+1}^{2m}) = C_1(y_{m+1}^{2m}) \\ \dots\dots \\ C_m(x_{m+1}^{2m}) = C_m(y_{m+1}^{2m}) \end{cases}$$

Folosim faptul că sistemele $\{B_1, \dots, B_m\}$ și $\{C_1, \dots, C_m\}$ sunt ortogonale, vom obține :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ \dots\dots \\ x_m = y_m \\ x_{m+1} = y_{m+1} \\ \dots\dots \\ x_{2m} = y_{2m} \end{cases}$$

Și am arătat că soluția sistemului $\{D_{ij} \mid i = 1,2; j = \overline{1,m}\}$ este unică și deci sistemul este ortogonal, $\forall x_1, \dots, x_{2m}$. □

Propoziția 1.3.6. [58] *Fie Q o mulțime finită $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un sistem ortogonal de quasigrupuri $n-$are definite pe Q, iar $\{B_1, B_2, \dots, B_m\} -$ un sistem ortogonal de quasigrupuri $m-$are definite pe Q. Atunci din sistemul $\{C_{ij}\}_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}}$ de operații $(n+m-1)-$ are, definite pe Q, în felul următor:*

$$C_{ij}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = A_i\left(x_1, \dots, x_{n-1}, B_j(y_1, \dots, y_m)\right),$$

$\forall x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m \in Q$, $\forall i = \overline{1,n}$, $\forall j = \overline{1,m}$, *putem forma* $m \cdot n^{m-1}$ *sisteme ortogonale din* $n+m-1$ *quasigrupuri de arietate* $n+m-1$.

Demonstrație. Considerăm egalitățile:

$$\begin{cases} \begin{cases} C_{11}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = C_{11}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}), \\ C_{21}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = C_{21}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}), \\ \dots\dots \\ C_{n1}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = C_{n1}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}), \end{cases} \\ \dots\dots \\ \begin{cases} C_{1m}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = C_{1m}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}), \\ C_{2m}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = C_{2m}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}), \\ \dots\dots \\ C_{nm}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = C_{nm}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}), \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} A_1(x_1, \dots, x_{n-1}, B_1(y_1, \dots, y_m)) = A_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_1(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})), \\ A_2(x_1, \dots, x_{n-1}, B_1(y_1, \dots, y_m)) = A_2(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_1(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})), \\ \dots\dots \\ A_n(x_1, \dots, x_{n-1}, B_1(y_1, \dots, y_m)) = A_n(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_1(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})), \end{cases} \\ \dots\dots \\ \begin{cases} A_1(x_1, \dots, x_{n-1}, B_m(y_1, \dots, y_m)) = A_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_m(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})), \\ A_2(x_1, \dots, x_{n-1}, B_m(y_1, \dots, y_m)) = A_2(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_m(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})), \\ \dots\dots \\ A_n(x_1, \dots, x_{n-1}, B_m(y_1, \dots, y_m)) = A_n(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_m(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})), \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Sistemul $\sum = \{C_{1j}, \dots, C_{nj}\} \cup \{C_{i1}, \dots, C_{i,j-1}, C_{i,j+1}, \dots, C_{in}\}, {}_{j=\overline{1,m}}^{i=\overline{1,n}}$ este ortogonal:

$$\begin{cases} A_1\left(x_1, \dots, x_{n-1}, B_j(y_1, \dots, y_m)\right) = A_1\left(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_j(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})\right), \\ A_2\left(x_1, \dots, x_{n-1}, B_j(y_1, \dots, y_m)\right) = A_2\left(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_j(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})\right), \\ \dots\dots \\ A_n\left(x_1, \dots, x_{n-1}, B_j(y_1, \dots, y_m)\right) = A_n\left(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_j(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})\right), \\ A_i(x_1, \dots, x_{n-1}, B_1(y_1, \dots, y_m)) = A_i(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_1(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})), \\ \dots\dots \\ A_i\left(x_1, \dots, x_{n-1}, B_{j-1}(y_1, \dots, y_m)\right) = A_i\left(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_{j-1}(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})\right), \\ A_i\left(x_1, \dots, x_{n-1}, B_{j+1}(y_1, \dots, y_m)\right) = A_i\left(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_{j+1}(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})\right), \\ \dots\dots \\ A_i(x_1, \dots, x_{n-1}, B_m(y_1, \dots, y_m)) = A_i(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, B_m(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \overline{x_1} \\ \dots. \\ x_{n-1} = \overline{x_{n-1}} \\ B_1(y_1, \dots, y_m) = B_1(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}) \\ \dots. \\ B_m(y_1, \dots, y_m) = B_m(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \overline{x_1} \\ \dots. \\ x_{n-1} = \overline{x_{n-1}} \\ y_1 = \overline{y_1} \\ \dots. \\ y_m = \overline{y_m} \end{cases}$$

Cu ajutorul acestor operații pot fi formate sisteme ortogonale în $m \cdot n^{m-1}$ moduri. □

Corolarul 1.3.1. *Pentru orice* $n \geq 2$, *existe sisteme ortogonale din n quasigrupuri n-are de* *orice ordin* $q \neq 1,2,6$.

Acest corolar rezultă din Propoziția 1.3.6 și din faptul că există quasigrupuri binare ortogonale de orice ordin $q \neq 1,2,6$. □

1.4. Concluzii la Capitolul 1

În primul capitol este prezentată o analiza a rezultatelor cunoscute care se referă la tema tezei. Se arată că numărul maximal de parastrofi distincți ai unui quasigrup n −ar (Q, A) coincide cu indicele $|\mathrm{S}_{\mathrm{n}+1}: \mathrm{H}|$ al subgrupului $\mathrm{H} = \{\sigma \in \mathrm{S}_{\mathrm{n}+1} | \mathrm{A} = {}^{\sigma}\mathrm{A}\}$ în $\mathrm{S}_{\mathrm{n}+1}$. Astfel, numărul maximal posibil de parastrofi distincți ai unui quasigrup n −ar este un divizor al numărului $(\mathrm{n}+1)!$, iar **s**eturile maximale de parastrofi distincți ale operației n −are de quasigrup A sunt seturile de reprezentanți ai claselor din mulțimea-factor $(\mathrm{S}_{\mathrm{n}+1}/\mathrm{H})_{\mathrm{d}} = \{\mathrm{H}\beta | \beta \in \mathrm{S}_{\mathrm{n}+1}\}$.

C.C. Lindner și D. Steedly [76] au stabilit condiții necesare si suficiente ca un quasigrup binar să posede 1, 2, 3 sau 6 parastrofi distincți, utilizând în acest scop cinci identități de lungime patru, cu două variabile. Autoarea tezei a precizat acest rezultat, arătând că în acest caz una dintre cele cinci identităti poate fi eliminată (Propozitia 1.1.4).

În caz ternar se știe că există quasigrupuri cu exact k parastrofi distincți, pentru fiecare $k \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. În acest capitol sunt prezentate rezultatele obținute de M. McLeish [80, 81] referitoare la caracterizarea spectrului quasigrupurilor ternare finite cu exact k parastrofi distincți, unde k este un divizor al lui 24.

În ultimul paragraf al acestui capitol este prezentată informația necesară din domeniul operațiilor n −are ortogonale, în particular, al quasigrupurilor n −are ortogonale. Este descrisă metoda de construcție a sistemelor ortogonale de quasigrupuri n −are finite, dată de T. Evans, care utilizează sisteme ortogonale de quasigrupuri de aritate mai mică. Metoda dată arată existența sistemelor ortogonale din n quasigrupuri n −are finite ($n \geq 2$), de orice ordin $\mathrm{q} \neq 1, 2, 6$.

2 QUASIGRUPURI LINIARE BINARE ȘI TERNARE CU UN NUMĂR MAXIMAL DAT DE PARASTROFI DISTINCȚI

2.1. Quasigrupuri binare liniare cu exact k de parastrofi distincți $k = 1, 2$ sau 3

Mulțimile de parastrofi distincți ai unui quasigrup binar sunt caracterizate de subgrupurile grupului S_3:

$$H_1 = \{\varepsilon\}, H_2 = S_3, H_3 = \langle (12)\rangle, H_4 = \langle (13)\rangle,\ H_5 = \langle(23)\rangle,\ H_6 = \langle(123)\rangle.$$

Conform Lemelor 1.1.1 și 1.1.2, subgrupul $H = \{\sigma \in S_3 | A = {}^{\sigma}A\}$ coincide cu unul dintre subgrupurile $H_i, i = \overline{1,6},$ iar numărul maximal de parastrofi distincți ai quasigrupului (Q, A) este egal cu indicele lui H în S_3. Observăm că, dacă $H = H_1$, atunci toți cei 6 parastrofi ai quasigrupului (Q, A) sunt distincți doi câte doi, iar dacă $H = H_2$, atunci toți parastrofii lui (Q, A) coincid între ei, adică (Q, A) este un $TS -$quasigrup.

În acest paragraf sunt date caracterizari ale T-quasigrupurilor binare, cu un număr exact dat de parastrofi distincți.

Fie $(Q, +)$ un grup abelian. Un quasigrup binar (Q, A) se numește T-quasigrup cu T-grupul $(Q, +)$ dacă există automorfismele $\alpha_1, \alpha_2 \in Aut(Q, +)$ și un element $c \in Q$ astfel încât $A(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + c,$ pentru $\forall\, x_1, x_2 \in Q$.

$\boldsymbol{TS - T}$ −Quasigrupuri binare

Un rol aparte în teoria quasigrupurilor în are clasa quasigrupurilor total simetrice.

Definiția 2.1.1. *Quasigrupul binar (Q, A) se numește total simetric, sau TS-quasigrup, dacă relația $A(x_1, x_2) = x_3$ implică $A(x_1', x_2') = x_3'$, unde x_1', x_2', x_3' este orice permutare a elementelor $x_1,\ x_2,\ x_3$.*

O definiție echivalentă a TS-quasigrupului binar este următoarea:

Definiția 2.1.2. *Quasigrupul binar (Q, A) se numește $TS -$quasigrup dacă au loc identitățile:*

$$A(x_1, x_2) = A(x_2, x_1), \tag{2.1}$$

$$A\big(x_1, A(x_1, x_2)\big) = x_2, \tag{2.2}$$

Din definiția $TS -$quasigrupului rezultă că toți parastrofii acestui quasigrup coincid.

Propoziția 2.1.1. *Un $T -$quasigrup binar (Q, A), cu $T -$ grupul (Q,+), este un $TS -$quasigrup dacă și numai dacă*

$$A(x_1, x_2) = Ix_1 + Ix_2 + c, \tag{2.3}$$

$\forall\, x_1, x_2 \in\ Q$, unde $c \in Q$ și $I(x) = -x, \forall x \in\ Q$.

Demonstrație. Fie (Q, A), $A(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + c$, un $T-$ quasigrup cu $T-$ grupul $(Q, +)$. Pentru a demonstra propoziția este suficient să utilizăm identitățile (2.1) și (2.2). Fie că quasigrupul (Q, A) satisface identitatea (2.1), ce este echivalentă cu egalitatea parastrofilor A și ${}^{(12)}A$. Utilizând forma operației și identitatea (2.1), obținem

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + c = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + c.$$

Luând $x_1 = 0$ în ultima egalitate, avem $\alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_2$, de unde obținem $\alpha_1 = \alpha_2$. Din identitatea (2.2) și ultima egalitate primită, avem:

$$A\big(x_1, A(x_1, x_2)\big) = x_2 \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + c) + c = x_2$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \alpha_1 c + c = x_2.$$

Substituind în ultima egalitate $x_1 = x_2 = 0$, unde 0 este elementul neutru al grupul $(Q, +)$, obținem $\alpha_1 c + c = 0$. Atunci $\alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 = x_2$. Considerând în ultima relație $x_2 = 0$, avem: $\alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1^2 x_1 = \alpha_1 I x_1 \Rightarrow \alpha_1^2 = \alpha_1 I \Leftrightarrow \alpha_1 = I$. Ultima egalitate implică faptul că, operația este de forma (2.3).

Reciproc, dacă operația $A(x_1, x_2) = I x_1 + I x_2 + c$, atunci egalitatea parastrofilor $A(x_1, x_2) = {}^{(12)}A(x_1, x_2)$ este evidentă. Obținem:

$$A(x_1, x_2) = {}^{(13)}A(x_1, x_2) \Leftrightarrow A(A(x_1, x_2), x_2) = x_1 \Leftrightarrow I(I x_1 + I x_2 + c) + I x_2 + c = x_1 \Leftrightarrow$$
$$x_1 + x_2 + I x_2 + I c + c = x_1,$$

ceea ce este adevărat. Prin urmare, $A = {}^{(12)}A = {}^{(13)}A$. Analog, se obține egalitatea tuturor parastrofilor. □

Corolarul 2.1.1. *Quasigrupul* $(\mathbb{Z}_n, A)$, *unde* $A(x_1, x_2) = \overline{n-1} x_1 + \overline{n-1} x_2 + \bar{c}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$ *este un TS-quasigrup.*

Demonstrație. Pentru a demonstra afirmația este suficient să utilizăm identitățile (2.1) și (2.2). Ținând cont de faptul că $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, este inel comutativ, asociativ, cu unitate și $\overline{n-1}^2 \equiv 1 (mod\ n)$, obținem:

$$A(x_1, x_2) = \overline{n-1} x_1 + \overline{n-1} x_2 + \bar{c} = \overline{n-1} x_2 + \overline{n-1} x_1 + \bar{c} = A(x_2, x_1).$$
$$A\big(x_1, A(x_1, x_2)\big) = \overline{n-1} x_1 + \overline{n-1}(\overline{n-1} x_2 + \overline{n-1} x_1 + \bar{c}) + \bar{c} =$$
$$= \overline{n-1} x_1 + x_2 + x_1 + \overline{n-1}\bar{c} + \bar{c} = \overline{n-1+1} x_1 + x_2 + \overline{n-1+1}\bar{c} = \bar{n} x_1 + x_2 + \bar{n}\bar{c}.$$

Însă, $\bar{n} \equiv \bar{0} (mod\ n) \Leftrightarrow \bar{n}\bar{c} \equiv \bar{0} (mod\ n), \bar{n} x_1 \equiv \bar{0}\ (mod\ n)$. Prin urmare, relațiile (2.1) și (2.2) sunt satisfăcute, iar quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$ este un TS −quasigrup. □

Corolarul 2.1.2. *Există* TS −*quasigrupuri binare de orice ordin* $q \geq 1$.

Demonstrația acestui Corolar rezultă din Corolarul 2.1.1 pentru $q \geq 2$. Pentru $q = 1$, afirmația este evidentă. □

T-Quasigrupuri binare cu exact doi parastrofi distincți

Propoziția 2.1.2. T-*Quasigrupul binar* (Q, A) *cu T-grupul* $(Q, +)$, *are exact doi parastrofi distincți dacă și numai dacă există* $\alpha \in Aut(Q, +)$ *și un element* $c \in Q$, *astfel încât*

$$A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + a^{-1}x_2 + c,$$

unde $\alpha \neq I, \alpha^3 = I, \alpha c = -c$.

Demonstrație. Fie (Q, A) un $T-$ quasigrup binar cu T-grup $(Q, +)$. Atunci există automorfismele $\alpha_1, \alpha_2 \in Aut(Q)$, și $c \in Q$, astfel încât $A(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + c$, pentru $\forall\, x_1, x_2 \in Q$.

Quasigrupul (Q, A) are exact doi parastrofi distincți, dacă $\{\sigma \in S_3 | A = {}^{\sigma}A\} = H_6$, unde $H_6 = \langle(123)\rangle$. Deoarece $(123) \in H_6$, obținem:

$$A(x_1, x_2) = {}^{(123)}A(x_1, x_2)\,, \tag{2.4}$$

deci $A(A(x_2, x_1), x_2) = x_1\alpha_1(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + c) + \alpha_2 x_2 + c = x_1, \Leftrightarrow$

$$\alpha_1^2 x_2 + \alpha_1(\alpha_2 x_1) + \alpha_1 c + \alpha_2 x_2 + c = x_1. \tag{2.5}$$

Relația (2.5) este adevărată pentru $\forall x_1, x_2 \in Q$, reiese că este adevărată pentru $x_1 = x_2 = 0$, unde 0 este elementul neutru al grupului $(Q, +)$, prin urmare:

$$\alpha_1 c + c = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 c = Ic, \tag{2.6}$$

unde $x + Ix = 0, \forall x \in Q$. Din (2.6) și (2.5), obținem:

$$\alpha_1^2 x_2 + \alpha_1(\alpha_2 x_1) + \alpha_2 x_2 = x_1 \tag{2.7}$$

Fie $x_1 = 0$, atunci din egalitatea (2.7) ia forma:

$$\alpha_1^2 x_2 + \alpha_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1^2 x_2 = \alpha_2 I x_2 \Leftrightarrow \alpha_1^2 = I\alpha_2. \tag{2.8}$$

Fie $x_2 = 0$, atunci din relația (2.7) obținem:

$$\alpha_1(\alpha_2 x_1) = x_1 \Leftrightarrow \alpha_2\alpha_1 = \varepsilon \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_1^{-1} \tag{2.9}$$

Din (2.8) și (2.9), obținem:

$$\alpha_1^2 = I\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1^2 = I\alpha_1^{-1} \Leftrightarrow \alpha_1^3 = I.$$

Notând $\alpha_1 = \alpha$, obținem că operația A are forma:

$$A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + a^{-1}x_2 + c, \tag{2.10}$$

unde $\alpha^3 = I, \alpha c = Ic$.

Permutarea $(12) \notin H_6$. Prin urmare, $A(x_1, x_2) \neq A(x_2, x_1)$, de unde obținem

$$\alpha \neq \alpha^{-1} \Leftrightarrow \alpha^2 \neq \varepsilon.$$

Din relațiile $\alpha^3 = I$ *și* $\alpha^2 \neq \varepsilon$, obținem $I\alpha^{-1} \neq \varepsilon$, deci $\alpha \neq I$. Prin urmare, T-quasigrupul (Q, A) cu T-grupul $(Q, +)$, are exact doi parastrofi distincți dacă operația are forma (2.10), unde $\alpha \neq I, \alpha^3 = I, \alpha c = Ic$.

Reciproc, dacă $A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + a^{-1}x_2 + c$, unde $\alpha \neq I, \alpha^3 = I, \alpha c = Ic$, atunci: $A(x_1, x_2) = {}^{(123)}A(x_1, x_2) \Leftrightarrow A(A(x_1, x_2), x_1) = x_2 \Leftrightarrow \alpha^2 x_1 + x_2 + \alpha c + \alpha^{-1}x_1 + c = x_2 \Leftrightarrow$ $\alpha_1^{2x} = I\alpha^{-1}x_1$ - adevărată, deci $A = {}^{(123)}A$, de unde obținem $A = {}^{(123)}A = {}^{(132)}A$. De asemenea, avem $A = {}^{(123)}A = {}^{(12)(13)}A \Rightarrow {}^{(12)}A = {}^{(13)}A$ și

$$A = {}^{(132)}A = {}^{(12)(23)}A \Rightarrow {}^{(12)}A = {}^{(23)}A,$$

deci ${}^{(12)}A = {}^{(13)}A = {}^{(23)}A$. Observăm că, dacă am avea $A = {}^{(12)}A$, atunci $\alpha x_1 + \alpha^{-1}x_2 + c = \alpha x_2 + \alpha^{-1}x_1 + c$, ce implică $\alpha = \alpha^{-1}$, imposibil deoarece $\alpha^2 \neq \varepsilon$. □

Fie (Q, A), unde $A(x_1, x_2) = \varphi x_1 + \psi x_2 + c$, un T −quasigrup, Atunci parastrofii lui (Q, A) sunt:

$${}^{(12)}A(x_1, x_2) = \psi x_1 + \varphi x_2 + c,$$
$${}^{(13)}A(x_1, x_2) = \varphi^{-1}x_1 - \varphi^{-1}\psi x_2 - \varphi^{-1}c,$$
$${}^{(23)}A(x_1, x_2) = -\psi^{-1}\varphi x_1 + \psi^{-1}x_2 - \psi^{-1}c,$$
$${}^{(123)}A(x_1, x_2) = -\varphi^{-1}\psi x_1 + \varphi^{-1}x_2 - \varphi^{-1}c,$$
$${}^{(132)}A(x_1, x_2) = \psi^{-1}x_1 - \psi^{-1}\varphi x_2 - \psi^{-1}c.$$

Corolarul 2.1.3. *Quasigrupul* $(\mathbb{Z}_n, A): A(x_1, x_2) = \bar{a}x_1 + \bar{a}^{-1}x_2$ *are exact doi parastrofi distincți dacă și numai dacă* $\bar{a} \neq \overline{n-1}, \bar{a}^3 = \overline{n-1}$.

Demonstrația Corolarului rezultă direct din demonstrația Propoziției 2.1.2. Deoarece quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A): A(x_1, x_2) = \bar{a}x_1 + \bar{a}^{-1}x_2$ este liniar și $\overline{\bar{a} \to a}$ este un automorfism din $Aut(\mathbb{Z}_n, +)$, reiese că acest quasigrup satisface condițiile Propoziției 2.1.2 și are exact doi parastrofi distincți dacă și numai dacă $\bar{a} \neq \overline{n-1}, \bar{a}^3 = \overline{n-1}$. □

Exemplul 2.1.1. Quasigrupul $(\mathbb{Z}_9, A)$, unde $A(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$, verifică condițiile Propoziției 2.1.1: există $\alpha \in Aut(\mathbb{Z}_9, +)$, $\alpha(1) = 2$ și elementul $c = 0 \in Z_9$ astfel încât $\alpha^3 = I$, $\alpha^{-1}(1) = 5$. Prin urmare $(\mathbb{Z}_9, A)$, are exact doi parastrofi distincți. În baza Corolarului 2.1.3, acești parastrofi sunt

$$A(x_1, x_2) = {}^{(123)}A(x_1, x_2) = {}^{(132)}A(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2,$$
$${}^{(12)}A(x_1, x_2) = {}^{(13)}A(x_1, x_2) = {}^{(23)}A(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2.$$

Corolarul 2.1.4. *Există T-quasigrupuri binare finite, care au exact doi parastrofi distincți, de orice ordin primar* $q > 3$.

Afirmația rezultă din faptul că grupul multiplicativ al câmpului Galois este ciclic.

T-Quasigrupuri binare cu exact trei parastrofi distincți

Pentru un quasigrup comutativ are loc relația $A(x,y) = {}^{(12)}A(x,y)$, iar numărul de parastrofi distincți ai acestui quasigrup poate fi 3 sau 1. De exemplu, mulțimea de parastrofi distincți ai quasigrupului comutativ (Q,A), dat de primul tabel Cayley mai jos, are următorul sistem format din trei parastrofi distincți:

A	1	2	3	4	5	6
1	3	5	1	2	6	4
2	5	6	3	1	4	2
3	1	3	5	4	2	6
4	2	1	4	6	3	5
5	6	4	2	3	5	1
6	4	1	6	5	1	3

${}^{(13)}A$	1	2	3	4	5	6
1	3	4	1	2	6	5
2	4	6	3	1	4	2
3	1	3	5	4	2	6
4	2	5	4	6	3	5
5	6	1	2	3	5	1
6	5	2	6	5	1	3

${}^{(23)}A$	1	2	3	4	5	6
1	3	5	1	2	6	4
2	5	6	3	1	4	2
3	1	3	5	4	2	6
4	2	1	4	6	3	5
5	6	4	2	3	5	1
6	4	1	6	5	1	3

Propoziția 2.1.3. T-*Quasigrupul* (Q,A) *cu T-grupul* $(Q,+)$, *are exact trei parastrofi distincți dacă și numai dacă există* $\alpha \in Aut(Q,+)$, $\alpha \neq I$, *și un element* $c \in Q$, *astfel încât operația* $A(x_1,x_2)$ *are una dintre următoarele trei forme:*

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + c,\ Ix_1 + \alpha x_2 + c,\quad \alpha x_1 + Ix_2 + c.$$

Demonstrație. Fie $(Q,A$ un T-quasigrup binar cu T-grupul $(Q,+)$. Atunci există automorfizmele $\alpha_1, \alpha_2 \in Aut(Q)$ și $c \in Q$, astfel încât $A(x_1,x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + c$, pentru $\forall\, x_1, x_2 \in Q$.

Quasigrupul binar (Q,A) are exact trei parastrofi distincți dacă subgrupul $H = \{\sigma \in S_3 | A = {}^{\sigma}A\}$ coincide cu unul dintre subgrupurile $H_3 = \langle(12)\rangle, H_4 = \langle(13)\rangle, H_5 = \langle(23)\rangle$. Fie că $H = H_3 = \langle(12)\rangle$. Deoarece $(12) \in H_3$, obținem:

$$A(x_1,x_2) = {}^{(12)}A(x_1,x_2) \Leftrightarrow A(x_1,x_2) = A(x_2,x_1) \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + c = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + c \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1. \tag{2.11}$$

Egalitatea (2.11) este adevărată pentru $\forall x_1, x_2 \in Q$, deci luând $x_1 = 0$, unde 0 este elementul neutru al grupului $(Q,+)$, obținem $\alpha_1 = \alpha_2$. Notând $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, obținem că operația A are forma:

$$A(x_1,x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + c. \tag{2.12}$$

Deoarece $(13) \notin H_3$, avem: $A(x_1,x_2) \neq {}^{(13)}A(x_1,x_2) \Leftrightarrow A(A(x_1,x_2),x_2) \neq x_1 \Leftrightarrow$

$$\alpha(\alpha x_1 + \alpha x_2 + c) + \alpha x_2 + c \neq x_1 \Leftrightarrow \alpha^2 x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha c + \alpha x_2 + c \neq x_1.$$

Luând $x_1 = c = 0$ în ultima inegalitate, obținem

$$\alpha^2 x_2 + \alpha x_2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 x_2 \neq \alpha I x_2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq \alpha I \Leftrightarrow \alpha \neq I.$$

Prin urmare, T-quasigrupul (Q,A) are exact trei parastrofi distincți, dacă există $\alpha \in Aut(Q,+), \alpha \neq I$, astfel încât operația $A(x_1,x_2)$ are forma (2.12).

Fie acum $H = H_4 = \langle(13)\rangle$. Deoarece $(13) \in H_4$, obținem:

$$A(x_1, x_2) = {}^{(13)}A(x_1, x_2) \Leftrightarrow A(A(x_1, x_2), x_2) = x_1 \Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + c) + \alpha_2 x_2 + c = x_1$$

$$\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1\alpha_2 x_2 + \alpha_1 c + \alpha_2 x_2 + c = x_1. \tag{2.13}$$

Luând $x_1 = x_2 = 0$ în (2.13), avem:

$$\alpha_1 c + c = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 c = Ic. \tag{2.14}$$

Substituind (2.14) în (2.13), obținem:

$$\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1\alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_2 = x_1. \tag{2.15}$$

Pentru $x_1 = 0$, din (2.15) avem:

$$\alpha_1\alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2 x_2 = \alpha_2 I x_2 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2 = \alpha_2 I = I\alpha_2,$$

deci $\alpha_1 = I$. Notând $\alpha_2 = \alpha$, vom obține următoarea formă pentru operația $A(x_1, x_2)$:

$$A(x_1, x_2) = Ix_1 + \alpha x_2 + c. \tag{2.16}$$

Observăm că, $(12) \notin H_3 = \langle(13)\rangle$, prin urmare,

$$A(x_1, x_2) \neq {}^{(12)}A(x_1, x_2) \Leftrightarrow A(x_1, x_2) \neq A(x_2, x_1)$$

$$Ix_1 + \alpha x_2 + c \neq Ix_2 + \alpha x_1 + c \Leftrightarrow Ix_1 + \alpha x_2 \neq Ix_2 + \alpha x_1.$$

Luând $x_1 = 0$ în ultima inegalitate, obținem $\alpha x_2 \neq Ix_2$, deci $\alpha \neq I$. Astfel, T-quasigrupul (Q, A) cu T-grupul $(Q, +)$, are exact trei parastrofi distincți, dacă operația A are forma (2.16), unde $\alpha \neq I$.

În final, considerăm cazul $H = \{\sigma \in S_3 \,|\, A = {}^{\sigma}A\} = H_5 = \langle(23)\rangle$. Deoarece $(23) \in H_5$, obținem:

$$A(x_1, x_2) = {}^{(23)}A(x_1, x_2) \Leftrightarrow A\big(x_1, A(x_1, x_2)\big) = x_2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + c) + c = x_2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2\alpha_1 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \alpha_2 c + c = x_2. \tag{2.17}$$

Luând $x_1 = x_2 = 0$ în egalitatea (2.17), obținem:

$$\alpha_2 c + c = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 c = Ic. \tag{2.18}$$

Substituind (2.18) în (2.17), avem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2\alpha_1 x_1 + \alpha_2^2 x_2 = x_2. \tag{2.19}$$

Pentru $x_2 = 0$, din egalitatea (2.19) rezultă:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2\alpha_1 x_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2\alpha_1 x_1 = \alpha_1 I x_1 \Leftrightarrow \alpha_2\alpha_1 = \alpha_1 I = I\alpha_1.$$

Prin urmare, $\alpha_2 = I$. Notând $\alpha_1 = \alpha$, operația $A(x_1, x_2)$ ia forma:

$$A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + Ix_2 + c. \tag{2.20}$$

Observăm că $(12) \notin H_5$, prin urmare $A(x_1, x_2) \neq {}^{(12)}A(x_1, x_2) \Leftrightarrow A(x_1, x_2) \neq A(x_2, x_1)$

$$\alpha x_1 + Ix_2 + c \neq \alpha x_2 + Ix_1 + c \Leftrightarrow \alpha x_1 + Ix_2 \neq \alpha x_2 + Ix_1.$$

Pentru $x_1 = 0$, din ultima inegalitate obținem $Ix_2 \neq \alpha x_2 \Leftrightarrow \alpha \neq I$. Deci, T-quasigrupul (Q, A) are exact trei parastrofi distincți, dacă operația are forma (2.20), unde $\alpha \neq I$.

Reciproc. Fie (Q, +) un grup abelian, $\alpha \in Aut(Q, +), \alpha \neq I$ și fie $c \in Q$. Dacă (Q, A) este un T-quasigrup de forma $A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + c$, atunci acesta are următorii parastrofi:

$$A(x_1, x_2) = {}^{(12)}A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + c$$

$${}^{(13)}A(x_1, x_2) = {}^{(123)}A(x_1, x_2) = \alpha^{-1} x_1 + I x_2 + I\alpha^{-1} c,$$

$${}^{(23)}A(x_1, x_2) = {}^{(132)}A(x_1, x_2) = I x_1 + \alpha^{-1} x_2 + I\alpha^{-1} c.$$

Observăm că, dacă $\alpha x_1 + \alpha x_2 + c = \alpha^{-1} x_1 + I x_2 + I\alpha^{-1} c$, atunci pentru $x_1 = x_2 = 0$, am avea $I\alpha^{-1} c = c$, deci egalitatea celor doi parastrofi ia forma $\alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha^{-1} x_1 + I x_2$, de unde, luând $x_1 = 0$ am obține $\alpha = I$, imposibil, conform ipotezei.

Dacă $\alpha x_1 + \alpha x_2 + c = I x_1 + \alpha^{-1} x_2 + I\alpha^{-1} c$, atunci luând în mod analog $x_1 = x_2 = 0$, iar apoi $x_2 = 0$, obținem $\alpha = I$, imposibil. În final, dacă ar avea loc egalitatea $\alpha^{-1} x_1 + I x_2 + I\alpha^{-1} c = I x_1 + \alpha^{-1} x_2 + I\alpha^{-1} c$, atunci $\alpha^{-1} x_1 + I x_2 = I x_1 + \alpha^{-1} x_2$, iar luând $x_2 = 0$, obținem $\alpha^{-1} = I$, de unde rezultă $\varepsilon = \alpha I$, deci obținem și în acest caz $\alpha = I$. Astfel, quasigrupul (Q, A), unde $A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + c, \alpha \neq I$, are exact trei parastrofi distincți.

Dacă (Q, A) este un T-quasigrup de forma $A(x_1, x_2) = I x_1 + \alpha x_2 + c$, atunci acesta are următorii parastrofi: $A(x_1, x_2) = {}^{(13)}A(x_1, x_2) = I x_1 + \alpha x_2 + c$

$${}^{(12)}A(x_1, x_2) = {}^{(132)}A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + I x_2 + c,$$

$${}^{(23)}A(x_1, x_2) = {}^{(123)}A(x_1, x_2) = \alpha^{-1} x_1 + \alpha^{-1} x_2 + I\alpha^{-1} c.$$

Observăm că, dacă $I x_1 + \alpha x_2 + c = \alpha x_1 + I x_2 + c$, atunci luând $x_1 = 0$, am obține $\alpha = I$, imposibil, conform ipotezei. Dacă $I x_1 + \alpha x_2 + c = \alpha^{-1} x_1 + \alpha^{-1} x_2 + I\alpha^{-1} c$, atunci luând în mod analog $x_1 = x_2 = 0$, iar apoi $x_2 = 0$, obținem $\alpha^{-1} = I \Rightarrow \varepsilon = \alpha I \Rightarrow \alpha = I$. În final, dacă ar avea loc egalitatea $\alpha x_1 + I x_2 + c = \alpha^{-1} x_1 + \alpha^{-1} x_2 + I\alpha^{-1} c$, atunci luând $x_1 = x_2 = 0$, iar apoi $x_1 = 0$, obținem $\alpha^{-1} = I$, de unde rezultă $\alpha = I$. Astfel, quasigrupul (Q, A), unde $A(x_1, x_2) = I x_1 + \alpha x_2 + c, \alpha \neq I$, are exact trei parastrofi distincți.

În final, dacă (Q, A) este un T-quasigrup de forma $A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + I x_2 + c$, atunci acesta are următorii parastrofi: $A(x_1, x_2) = {}^{(23)}A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + I x_2 + c$

$${}^{(13)}A(x_1, x_2) = {}^{(132)}A(x_1, x_2) = \alpha^{-1} x_1 + \alpha^{-1} x_2 + I\alpha^{-1} c,$$

$${}^{(12)}A(x_1, x_2) = {}^{(123)}A(x_1, x_2) = I x_1 + \alpha x_2 + c.$$

Observăm că, dacă $\alpha x_1 + I x_2 + c = \alpha^{-1} x_1 + \alpha^{-1} x_2 + I\alpha^{-1} c$, atunci luând $x_1 = x_2 = 0$, apoi $x_1 = 0$, am obține $\alpha = I$, imposibil, conform ipotezei. Dacă $\alpha x_1 + I x_2 + c = I x_1 +$

$\alpha x_2 + c$, atunci luând în mod analog $x_1 = x_2 = 0$, iar apoi $x_2 = 0$, obținem $\alpha = I$. În final, dacă ar avea loc egalitatea $\alpha^{-1}x_1 + \alpha^{-1}x_2 + I\alpha^{-1}c = Ix_1 + \alpha x_2 + c$, atunci luând $x_1 = x_2 = 0$, iar apoi $x_2 = 0$, obținem $\alpha^{-1} = I$, de unde rezultă $\alpha = I$. Astfel, quasigrupul (Q, A), unde $A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + Ix_2 + c, \alpha \neq I$, are exact trei parastrofi distincți.□

Corolarul 2.1.5. *Quasigrupul* $(\mathbb{Z}_n, A)$: $A(x_1, x_2) = \bar{a}x_1 + \bar{b}x_2 + \bar{c}$, *unde* $(a, n) = 1, (b, n) = 1, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$, *are exact trei parastrofi distincți, dacă și numai dacă operația are una dintre formele* $\overline{n-1}x_1 + \bar{a}x_2 + \bar{c}, \bar{a}x_1 + \overline{n-1}x_2 + \bar{c}, \bar{a}x_1 + \bar{a}x_2 + \bar{c}$, *unde* $\bar{a} \not\equiv \overline{n-1}\ (mod\ n)$.

Demonstrație. Demonstrația corolarului rezultă direct din demonstrația Propoziției 2.1.3. Quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$: $A(x_1, x_2) = \bar{a}x_1 + \bar{b}x_2 + \bar{c}$ este un caz particular al T-quasigrupului peste grupul $(\mathbb{Z}_n,+)$. În acest caz, $\bar{1} \to \bar{a}, \bar{1} \to \bar{b}$ definesc automorfisme ale grupului $(\mathbb{Z}_n,+)$, adică $(a, n) = 1$ și $(b, n) = 1$. În inelul $\mathbb{Z}_n$, automorfismul I, unde $Ix = -x$, este dat de elementul $\bar{1} \to \overline{n-1}$. Subtituind datele în condițiile Propoziției 2.1.3, obținem cele trei forme ale operației prezentate în enunțul Corolarului. □

Corolarul 2.1.6. *Quasigrupul* $(\mathbb{Z}_n, A)$: $A(x_1, x_2) = \bar{a}x_1 + \overline{n-1}x_2$, *unde* $(a, n) = 1$, $a \neq n-1$, *exact trei parastrofi distincți și anume*

$$A(x_1, x_2) = {}^{(23)}A(x_1, x_2) = \bar{a}x_1 + \overline{n-1}x_2\ ,$$

$${}^{(13)}A(x_1, x_2) = {}^{(132)}A(x_1, x_2) = \bar{a}^{-1}x_1 + \bar{a}^{-1}x_2,$$

$${}^{(12)}A(x_1, x_2) = {}^{(123)}A(x_1, x_2) = \overline{n-1}x_1 + \bar{a}x_2.$$

Corolarul 2.1.7. *Quasigrupul* $(\mathbb{Z}_n, A)$: $A(x_1, x_2) = \overline{n-1}x_1 + \bar{b}x_2$, *unde* $(b, n) = 1, b \neq n-1$ *are exact trei parastrofi distincți și anume*

$$A(x_1, x_2) = {}^{(13)}A(x_1, x_2) = \overline{n-1}x_1 + \bar{b}x_2\ ,$$

$${}^{(23)}A(x_1, x_2) = {}^{(123)}A(x_1, x_2) = \bar{b}^{-1}x_1 + \bar{b}^{-1}x_2\ ,$$

$${}^{(12)}A(x_1, x_2) = {}^{(132)}A(x_1, x_2) = \bar{b}x_1 + \overline{n-1}x_2.$$

Corolarul 2.1.8. *Quasigrupul* $(\mathbb{Z}_n, A)$: $A(x_1, x_2) = \bar{a}x_1 + \bar{a}x_2$, *unde* $(a, n) = 1, a \neq n-1$ *are exact trei parastrofi distincți și anume*

$$A(x_1, x_2) = {}^{(12)}A(x_1, x_2) = \bar{a}x_1 + \bar{a}x_2,$$

$${}^{(23)}A(x_1, x_2) = {}^{(123)}A(x_1, x_2) = \overline{n-1}x_1 + \bar{a}^{-1}x_2\ ,$$

$${}^{(13)}A(x_1, x_2) = {}^{(132)}A(x_1, x_2) = \bar{a}^{-1}x_1 + \overline{n-1}x_2.$$

Exemplul 2.1.2. Quasigrupurile $(\mathbb{Z}_5, A_1)$: $A_1(x_1, x_2) = \bar{2}x_1 + \bar{4}x_2, ;$ $(\mathbb{Z}_7, A_2)$: $A_2(x_1, x_2) =$

$\bar{6}x_1 + \bar{4}x_2$; (Z_9, A_3): $A_3(x_1, x_2) = \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2$ au exact câte trei parastrofi distincți. De exemplu, quasigrupul $(\mathbb{Z}_5, A_1)$ are următorii parastrofi distincți

$$A_1(x_1, x_2) = {}^{(23)}A_1(x_1, x_2) = \bar{2}x_1 + \bar{4}x_2,$$

$$^{(13)}A_1(x, y) = {}^{(123)}A_1(x_1, x_2) = \bar{3}x_1 + \bar{3}x_2,$$

$$^{(132)}A_1(x_1, x_2) = {}^{(12)}A_1(x_1, x_2) = \bar{4}x_1 + \bar{2}x_2.$$

Corolarul 2.1.9. *Există T-quasigrupuri binare finite, care au exact trei parastrofi distincți, de orice ordin* $q > 2$.

Într-adevăr, considerând quasigrupul $(\mathbb{Z}_q, A)$: $A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Din Corolarul 2.1.7, obținem mulțimea parastrofilor distincți

$$A(x_1, x_2) = {}^{(12)}A(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$^{(23)}A(x_1, x_2) = {}^{(132)}A(x_1, x_2) = \overline{q-1}x_1 + x_2\,,$$

$$^{(13)}A(x_1, x_2) = {}^{(123)}A(x_1, x_2) = x_1 + \overline{q-1}x_2.$$

Cei trei parastrofi sunt distincți dacă și numai dacă $q - 1 \not\equiv 1\ (mod\ q)$. Prin urmare, $q \not\equiv 2\ (mod\ q)$. Astfel, cei trei parastrofi ai quasigrupului $(\mathbb{Z}_q, A)$ sunt distincți, pentru orice $q > 2$. □

2.2. DC −Quasigrupuri

Quasigrupurile binare cu toți cei 6 parastrofi distincți au fost studiate în [21, 22] și sunt numite DC −quasigrupuri. Considerăm setul de identități:

$$\bar{T} = \{A(x, A(x, y)) = y, A(A(y, x), x) = y, A(x, y) = A(y, x), A(A(x, y), x) = y\}.$$

Unul dintre criteriile ca un quasigrup să fie DC −quasigrup este reflectat de realizarea identităților mulțimii $\bar{T}$ pe quasigrupul *(Q, A)*.

Observăm că quasigrupul (Q, A) este un DC −quasigrup dacă și numai dacă el nu satisface nici una dintre identitățile mulțimii $\bar{\mathrm{T}}$. Alte criterii ce prezintă condiții necesare și suficiente ca un quasigrup să fie un DC-quasigrup sunt date de inegalitatea unor perechi de parastrofi.

Lema 2.2.1. Un q*uasigrup binar* (Q, A) *este un* DC *−quasigrup, dacă și numai dacă*

$$A \notin \left\{{}^{(12)}A, {}^{(13)}A, {}^{(23)}A, {}^{(123)}A\right\}.$$

Demonstrație. Într-adevăr, pentru ca un quasigrup să fie un DC −quasigrup este necesar ca parastrofii – componente în perechile din cele patru clase date în Propoziția 1.1.1, să fie distincți. Astfel avem: a) dacă$A \neq {}^{(12)}A$, atunci ${}^{(23)}A \neq {}^{(123)}A$, ${}^{(13)}A \neq {}^{(132)}A$; b) dacă $A \neq {}^{(13)}A$, atunci ${}^{(12)}A \neq {}^{(123)}A$, ${}^{(23)}A \neq {}^{(132)}A$; c) dacă $A \neq {}^{(23)}A$, atunci ${}^{(12)}A \neq {}^{(132)}A$, ${}^{(13)}A \neq {}^{(123)}A$. Din inegalitatea $A \neq {}^{(123)}A$, obținem $A \neq {}^{(132)}A$, ${}^{(13)}A \neq {}^{(23)}A$, ${}^{(23)}A \neq {}^{(12)}A$, ${}^{(123)}A \neq {}^{(132)}A$, ${}^{(12)}A \neq {}^{(13)}A$. Prin urimare, orice doi parastrofi ai quasigrupului (Q, A) sunt distincți, adică (Q, A) este un DC −quasigrup. □

În continuare vor fi demonstrate unele proprietăți ale DC −quasigrupurilor.

Propoziția 2.2.1. *Fie (Q, A) un DC −quasigrup. Sunt adevărate afirmațiile:*

1) Orice DC −quasigrup este necomutativ și netrivial.

2) Orice quasigrup care conține un DC −subquasigrup este un DC −quasigrup.

3) Orice parastrof al unui DC −quasigrupul este DC −quasigrup.

4) Orice quasigrup netrivial ce este imagine omomorfică a unui DC − quasigrup este un DC −quasigrup.

Demonstrație. 1) În DC −quasigrupuri $A \neq {}^{(12)}A$.

2) Un quasigrup (Q, A) este DC −quasigrup dacă și numai dacă (Q, A) nu verifică nici una dintre identitățile incluse în mulțimea $\overline{T}$:

$$\overline{T} = \{A(x, A(x, y)) = y, A(A(y, x), x) = y, A(x, y) = A(y, x), A(A(x, y), x) = y\}.$$

Dacă un subquasigrup al quasigrupului (Q, A) nu verifică nici o identitatea din $\overline{T}$, atunci și (Q, A) nu va verifica niciuna dintre aceste identități, deci (Q, A) va fi un DC −quasigrup.

3) Considerăm ${}^{\sigma}A$ un parastrof al quasigrupului (Q, A). Atunci mulțimea parastrofilor disctinți este dată de ${}^{\sigma}\overline{\Sigma(A)}$, unde $\overline{\Sigma(A)}$ este mulțimea parastrofilor distincți ai quasigrupului (Q, A). Mulțimea ${}^{\sigma}\overline{\Sigma(A)}$ conține toate elementele distincte, adică $\left|{}^{\sigma}\overline{\Sigma(A)}\right| = 6$. Astfel, quasigrupul $(Q, {}^{\sigma}A)$ este un DC −quasigrup.

4) Fie (P, B) un quasigrup netrivial ce este imagine omomorfică al unui DC − quasigrup (Q, A): $A = B^S$, unde $S = (\alpha, \alpha, \alpha), \alpha$ este aplicația mulțimii Q în mulțimea P, astfel încât

$$\alpha A(x, y) = B(\alpha x, \alpha y).$$

Fără dificultăți poate fi arătat că, pentru doi parastrofi τ și σ ai quasigrupului (P, B), avem că ${}^{\tau}B = {}^{\sigma}B$, dacă și numai dacă, $({}^{\tau}B)^S = ({}^{\sigma}B)^S$. În baza Lemei 1.3. din [10], obținem că ${}^{\sigma}(B^S) = ({}^{\sigma}B)^{\sigma S}$, atunci

$${}^{\sigma}A = {}^{\sigma}(B^S) = ({}^{\sigma}B)^{\sigma S} = ({}^{\sigma}B)^S,$$

deoarece $\sigma S = \sigma(\alpha, \alpha, \alpha) = (\sigma\alpha, \sigma\alpha, \sigma\alpha) = S$. Astfel, ${}^{\sigma}B = {}^{\tau}B$, dacă și numai dacă ${}^{\sigma}A =$

${}^{\tau}A$. Deoarece (Q, A) este DC −quasigrup, ${}^{\sigma}A \neq {}^{\tau}A$, ceea ce implică că ${}^{\sigma}B \neq {}^{\tau}B$. Astfel, (P, B) este DC −quasigrup. □

Observăm că în lucrarea [76], C.C. Lindner și D. Steedly au arătat că există quasigrupuri binare finite, cu toți cei șase parastrofi distincți, de orice ordin $q \geq 4$. Teorema următoare prezintă un criteriu ca un T −quasigrup binar să fie un DC −quasigrup.

Teorema 2.2.1. *T −quasigrupul (Q, A), $A(x,\ y) = \varphi x + \psi y$, este un DC −quasigrup dacă și numai dacă $\varphi \neq I, \psi$; $\psi \neq\ I$ și $\varphi^2 \neq I\psi$ sau $\psi^2 \neq I\varphi$.*

Demonstrație. Dacă sunt satisfăcute inegalitățile indicate, atunci are loc inegalitatea parastrofilor în fiecare clasă din cele patru date în Propoziția 1.1.1. Astfel, toți parastrofii quasigrupului sunt distincți. Reciproc, în baza Propoziției 1.1.4, pentru a stabili condițiile în care un T −quasigrup este un DC −quasigrup este suficient de considerat inegalitatea unei perechi de parastrofi în fiecare clasă prezentată în Propoziția 1.1.1. Fie $A \neq {}^{(23)}A$. Considerăm $(x_0, y_0) \in Q^2$ și $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Atunci,

$$\varphi x_0 + \psi y_0 \neq \psi^{-1}(y_0 - \varphi x_0) \text{ sau } (\varphi + \psi^{-1}\varphi)x_0 \neq (\psi^{-1} + I\psi)y_0.$$

Dacă $\varphi x_0 + \psi^{-1}\varphi x_0 = (\varphi + \psi^{-1}\varphi)x_0 \neq 0$, atunci $\varphi \neq I\psi^{-1}\varphi$ și $\psi \neq I$. Analog obținem condițiile respective considerând inegalitatea parastrofilor $A \neq {}^{(13)}A$, $A \neq {}^{(12)}A$ și $A \neq {}^{(123)}A$. □

Corolarul 2.2.1. *Quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$: $A(x_1, x_2) = \bar{a}x_1 + \bar{b}x_2$, unde $(a, n) = 1, (b, n) = 1$, a, $b \neq n - 1$, $a \neq b$ și cel puțin una dintre relațiile $a \neq\ b^{-1}$, $a^3 \neq n - 1$ nu este satisfăcută, are toți parastrofii distincți.*

Observăm că, în condițiile Corolarului 2.2.1, cei șase parastrofi ai quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$ sunt:

$${}^{(12)}A(x,y) = bx + ay\ (mod\ n),\quad {}^{(23)}A(x,y) = b^{-1}(y - ax)\ (mod\ n),$$

$${}^{(13)}A(x,y) =\ a^{-1}(x - by)\ (mod\ n),\quad {}^{(123)}A(x,y) = a^{-1}(y - bx)\ (mod\ n),$$

$${}^{(132)}A(x,y) = b^{-1}(x - ay)\ (mod\ n).$$

Teorema 2.2.2. *Pentru orice $q \geq 5$, $q \neq 6$, există $DC - T$ −quasigrupuri de ordinul q.*

Demonstrație. Considerăm T −quasigrupul de ordinul q, $(\mathbb{Z}_q, A)$: $A(x,y) = x + ky\ (mod\ \ q)$, unde $q \geq 5$, $q \neq 6$, $(q,k) = 1, k \neq 1, q - 1$. Pentru acest quasigrup avem $L_a = L_1 = \varepsilon$, $L_b = L_k$, unde $L_a x = ax(mod\ q)$. Verificăm condițiile Corolarului 2.2.1:

$$L_1, L_k \neq\ L_{n-1}(mod\ q),\ \ L_k \neq L_1 \text{ și } L_1 \neq L_k^{-1}, \qquad L_k \neq \varepsilon.$$

Astfel, în baza Corolarului 2.2.1, obținem că toți parastrofii quasigrupului $(\mathbb{Z}_q, A)$ sunt distincți, adică quasigrupul $(\mathbb{Z}_q, A)$ este un $DC-T$ −quasigrup. □

Exemplul 2.2.1. Quasigrupul $(\mathbb{Z}_5\,, A)$: $A(x,y) = x + \bar{2}y$ este un $DC-T-$ quasigrup. Într-adevăr, în acest caz parastrofii quasigrupului dat sunt:

$$^{(12)}A(x,y) = \psi x + \varphi y = \bar{2}x + y,$$

$$^{(23)}A(x,y) = \psi^{-1}(y - \varphi x) = L_2^{-1}(y-x) = L_{2^{-1}}(y-x) = \bar{3}y - \bar{3}x = \bar{2}x + \bar{3}y\,,$$

$$^{(13)}A(x,y) = \varphi^{-1}(x - \psi y) = x - \bar{2}y \;= x + \bar{3}y\,,$$

$$^{(123)}A(x,y) = \psi^{-1}(x - \varphi y) = L_{2^{-1}}x - L_{2^{-1}}y = \bar{3}x - \bar{3}y = \bar{3}x + \bar{2}y$$

$$^{(132)}A(x,y) = \varphi^{-1}(y - \psi x) = -\bar{2}x + y \;= \bar{3}x + y\,.$$

2.3. T −Quasigrupuri ternare cu un număr maximal atins de parastrofi distincți

Conform [80], numărul maximal de parastrofi distincți ai unui quasigrup ternar divide $4! \;=\; 24$. Spectrul quasigrupurilor ternare finite, cu un număr exact k de parastrofi distincți a fost caracterizat complet în cazul $k = 1, 3, 4, 6, 12, 24$, și parțial în cazul $k = 2$ sau 8, de către M. MacLeish [80, 81]. În acest compartiment prezentăm caracterizări complete ale $T-$formei T −quasigrupurilor ternare cu exact k parastrofi distincti, pentru $k \in \{3, 4, 6\}$.

T-Quasigrupuri ternare cu exact unu sau exact doi parastrofi distincți

Quasigrupurile ternare total simetrice, sau TS −quasigrupurile ternare, se definesc analog quasigrupurilor binare și anume, quasigrupurile ternare cu toți parastrofii egali între ei se numesc TS −quasigrupuri. În lucrările [80, 81], M. E. McLeish, studiază TS −quasigrupurile ternare și demonstrează că există $TS-$ quasigrupuri ternare de orice ordin $q \in \mathbb{N}^*$. Pentru $TS-T$ −quasigrupurile ternare M. E. McLeish determină și forma operației: un T −quasigrup ternar (Q, A), cu T-grupul $(Q, +)$, este un $TS-T-$quasigrup, dacă și numai dacă $A(x_1, x_2, x_3) = Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + c$, unde $Ix = -x, c \in Q$.

În studiul său McLeish a determinat setul de identități pe care trebuie să îl satisfacă un quasigrup ternar pentru a avea exact doi parastrofi distincți. Cu toate acestea, construcția acestor quasigrupuri este dificilă. În 1980 McLeish reușește să construiască un quasigrup ternar cu exact doi parastrofi distincți prin metode combinatorice. În aceeași lucrare [81], McLeish studiază spectrul quasigrupurilor ternare cu exact doi parastrofi distincți și obține că există quasigrupuri ternare cu exact 2 parastrofi distincți pentru orice $n \equiv 0 \;(mod\;\; 8)$, $n \equiv 0$ sau 5 $(mod\; 10)$, $n \equiv 4$, 8 sau 10 $(mod\; 12), \forall\, n \geq 5$. În particular, M. McLeish arată că nu există quasigrupuri ternare de ordinul 3 sau 4, care au exact doi parastrofi distincți.

Ulterior, F. Sokhatsky și Y. Pirus [123, 124] au studiat quasigrupurile ternare liniare cu cel mult k parastrofi distincți, unde k este divizor al lui 24 (maximumul nu neapărat se atinge). În particular acești autori au obținut, independent, același rezultat ca și M. Mcleish, referitor la quasigrupurile ternare liniare cu toți parastrofii egali între ei (TS-quasigrupuri ternare). De asemenea, F. Sokhatsky și E. Pirus arată că nu există quasigrupuri ternare liniare cu exact doi parastrofi distincți.

T-Quasigrupuri ternare cu un maximum atins de trei parastrofi distincți

Quasigrupurile ternare cu exact trei parastrofi distincți au fost studiate inițial de către McLeish [80], utilizând seturile de identități prezentate în Lema 1.2.1, punctul 3, ce corespund celor trei subgrupuri de ordinul 8 ale grupului S_4 care sunt izomorfe grupului D_8. Aceste subgrupuri sunt prezentate în Anexa 1 și sunt date de H_{26}, H_{27}, H_{28}. Observăm că M. McLeish a caracterizat integral spectrul unor astfel de quasigrupuri. Mai jos vor fi studiate T-quasigrupurile ternare ce posedă exact trei parastrofi distincți.

Propoziția 2.3.1. *Dacă un quasigrup ternar* (Q, A) *are exact trei parastrofi distincți atunci* $\left\{A, {}^{(123)}A, {}^{(132)}A\right\}$ *este unul dintre seturile maximale de parastrofi distincți.*

Într-adevăr, dacă mulțimea parastrofilor quasigrupului ternar (Q, A) este caracterizată de unul dintre subgrupurile $H_i, i = 26, 27, 28,$ atunci $S_4 = H_i \cup (123)H_i \cup (132)H_i$.
Pentru cele trei subgrupuri $H_i, i = 26, 27, 28$ avem, respectiv, următoarele posibilități de egalitate a parastrofilor:

1) $H_i = H_{26}$:

$$A = {}^{(12)}A = {}^{(34)}A = {}^{(12)(34)}A = {}^{(14)(23)}A = {}^{(13)(24)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(1324)}A;$$
$${}^{(123)}A = {}^{(23)}A = {}^{(14)}A = {}^{(243)}A = {}^{(1243)}A = {}^{(1342)}A = {}^{(142)}A = {}^{(134)}A;$$
$${}^{(132)}A = {}^{(13)}A = {}^{(143)}A = {}^{(1432)}A = {}^{(1234)}A = {}^{(24)}A = {}^{(234)}A = {}^{(124)}A;$$

2) $H_i = H_{27}$:

$$A = {}^{(12)(34)}A = {}^{(23)}A = {}^{(14)}A = {}^{(14)(23)}A = {}^{(13)(24)}A = {}^{(1243)}A = {}^{(1342)}A;$$
$${}^{(123)}A = {}^{(13)}A = {}^{(1432)}A = {}^{(134)}A = {}^{(1234)}A = {}^{(24)}A = {}^{(243)}A = {}^{(142)}A;$$
$${}^{(132)}A = {}^{(12)}A = {}^{(34)}A = {}^{(124)}A = {}^{(1324)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(143)}A = {}^{(234)}A;$$

3) $H_i = H_{28}$:

$$A = {}^{(12)(34)}A = {}^{(14)(23)}A = {}^{(13)}A = {}^{(13)(24)}A = {}^{(24)}A = {}^{(1432)}A = {}^{(1234)}A;$$
$${}^{(123)}A = {}^{(12)}A = {}^{(34)}A = {}^{(1324)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(142)}A = {}^{(243)}A = {}^{(134)}A;$$
$${}^{(132)}A = {}^{(23)}A = {}^{(14)}A = {}^{(234)}A = {}^{(1342)}A = {}^{(1243)}A = {}^{(143)}A = {}^{(124)}A. \square$$

În [123, 124] autorii studiază quasigrupurile ternare liniare peste un grup abelian și afirmă că un quasigrup ternar liniar peste un grup abelian $(Q,+,0)$, unde 0 este elementul neutru al acestui grup, are maximum trei parastrofi distincți dacă și numai dacă operația $A(x_1,x_2,x_3)$ are forma

$$A(x_1,x_2,x_3) = \alpha x_1 + \alpha x_2 - x_3 + a,$$

unde $\alpha \in Aut(Q,+), a \in Q, \alpha a = -a$. În aceeași lucrare este specificat că în calitate de reprezentanți ai parastrofilor distincți pot fi considerați parastrofii $A(x_1,x_2,x_3)$, ${}^{(14)}A(x_1,x_2,x_3)$ și ${}^{(24)}A(x_1,x_2,x_3)$. Așa cum am observat anterior, această afirmație nu se referă la maximumul atins (maximumul exact) de parastrofi distincți ai quasigrupului dat. În continuare precizăm acest rezultat prin studiul tuturor T −formelor posibile ale unui T −quasigrup ternar ce are exact trei parastrofi distincți.

Propoziția 2.3.2. *Un T −quasigrup ternar (Q, A) cu T −grupul (Q,+) are un maximum atins din trei parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha \in Aut(Q,+)$ și un element $c \in Q$, astfel încât operația $A(x_1,x_2,x_3)$ are una dintre următoarele trei forme: $\alpha x_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + c$, $Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c$, $\alpha x_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + c$, unde $\alpha \neq I$, $\alpha^2 = \varepsilon$, $\alpha c = Ic, I(x) = -x$, $\forall x \in Q$.*

Demonstrație. Quasigrupul ternar (Q,A) are exact trei parastrofi distincți dacă subgrupul $H = \{\sigma \in S_4 | A = {}^{\sigma}A\}$ coincide cu unul dintre subgrupurile H_{26}, H_{27}, H_{28}, elementele cărora sunt prezentate în Anexa 1. Considerăm $\{\sigma \in S_4 | A = {}^{\sigma}A\} = H_{26}$. Deoarece $(12) \in H_{26}$, obținem:

$$A(x_1,x_2,x_3) = {}^{(12)}A(x_1,x_2,x_3) \tag{2.21}$$

Considerăm grupul abelian $(Q,+)$ și operația $A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c$, unde $x_1, x_2, x_3 \in Aut(Q)$ și $c \in Q$, liniară peste grupul $(Q,+)$. Atunci relația (2.21) are forma:

$$A(x_1,x_2,x_3) = A(x_2,x_1,x_3) \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_3 + c,$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_1. \tag{2.22}$$

Egalitatea (2.22) este adevărată pentru $\forall x_1, x_2 \in Q$, deci este adevărată pentru $x_1 = 0$, unde 0 este elementul neutru al grupului $(Q,+)$. Substituind în (2.22), obținem $\alpha_1 = \alpha_2$. Notăm $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. În acest caz operația are forma:

$$A(x_1,x_2,x_3) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha_3 x_3 + c. \tag{2.23}$$

$(34) \in H_{26}$. Prin urmare,

$$A(x_1,x_2,x_3) = {}^{(34)}A(x_1,x_2,x_3) \Leftrightarrow A\big(x_1,x_2,A(x_1,x_2,x_3)\big) = x_3 \Leftrightarrow \alpha x_1 + \alpha x_2$$
$$+ \alpha_3(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha_3 x_3 + c) + c = x_3.$$

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha_3 \alpha x_1 + \alpha_3 \alpha x_2 + \alpha_3^2 x_3 + \alpha_3 c + c = x_3 \tag{2.24}$$

Ultima egalitate este adevărată pentru $x_1, x_2, x_3 \in Q$, inclusiv pentru $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, de unde avem

$$\alpha_3 c + c = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 c = Ic \qquad (2.25)$$

Substituind (2.25) în (2.24), obținem:

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha_3 \alpha x_1 + \alpha_3 \alpha x_2 + \alpha_3^2 x_3 = x_3 .$$

Fie $x_1 = x_3 = 0$, atunci $\alpha x_2 + \alpha_3 \alpha x_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 \alpha x_2 = \alpha I x_2 \Leftrightarrow \alpha_3 \alpha = \alpha I \Leftrightarrow \alpha_3 = I$. Prin urmare, operația (2.23), are forma

$$A(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + I x_3 + c, Ix = -x. \qquad (2.26)$$

Deoarece $(13) \notin H_{26}$, reiese că $A(x_1, x_2, x_3) \neq {}^{(13)}A(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow \alpha x_1 + \alpha x_2 + I x_3 + c \neq \alpha x_3 + \alpha x_2 + I x_1 + c \Leftrightarrow \alpha x_1 + I x_3 \neq \alpha x_3 + I x_1$. Substituind $x_3 = 0$ în ultima relație, obținem: $\alpha x_1 \neq I x_1 \Leftrightarrow \alpha \neq I$.

$(12)(34) \in H_{26}$, prin urmare $A(x_1, x_2, x_3) = {}^{(12)(34)}A(x_{11}, x_2, x_3)$.

$$A\big(x_1, x_2, A(x_2, x_1, x_3)\big) = x_3. \qquad (2.27)$$

Aplicând pentru identitatea (2.27) forma operației (2.26), obținem:

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + I(\alpha x_2 + \alpha x_1 + I x_3 + c) + c = x_3$$

$\alpha x_1 + \alpha x_2 + I\alpha x_2 + I\alpha x_1 + x_3 + Ic + c = x_3$ −adevărat.

$(14)(23) \in H_{26}$, prin urmare $A(x_1, x_2, x_3) = {}^{(14)(23)}A(x_1, x_2, x_3)$.

$$A(A(x_1, x_2, x_3), x_3, x_2) = x_1. \qquad (2.28)$$

Aplicând pentru identitatea (2.28) forma operației (2.26), obținem:

$$\alpha(\alpha x_1 + \alpha x_2 + I x_3 + c) + \alpha x_3 + I x_2 + c = x_1$$

$$\alpha^2 x_1 + \alpha^2 x_2 + I\alpha x_3 + \alpha c + \alpha x_3 + I x_2 + c = x_1.$$

Pentru $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, obținem $\alpha c + c = 0 \Leftrightarrow \alpha c = Ic$. Luând $x_2 = x_3 = 0$, avem $\alpha^2 x_1 = x_1 \Leftrightarrow \alpha^2 = \varepsilon$.

$(13)(24) \in H_{26}$, prin urmare $A(x_1, x_2, x_3) = {}^{(13)(24)}A(x_1, x_2, x_3)$

$$A(x_3, A(x_1, x_2, x_3), x_1) = x_2 \Leftrightarrow \alpha x_3 + \alpha(\alpha x_1 + \alpha x_2 + I x_3 + c) + I x_1 + c = x_2$$

$$\alpha x_3 + \alpha^2 x_1 + \alpha^2 x_2 + I\alpha x_3 + \alpha c + I x_1 + c = x_2.$$

Prin urmare, quasigrupul ternar liniar (Q, A) are exact trei parastrofi distincți, dacă există $\alpha \in Aut(Q, +), \alpha \neq I, \alpha^2 = \varepsilon, \alpha c = Ic$, astfel încât operația $A(x_1, x_2, x_3)$ are forma (3.3.6).

Fie acum $H = H_{27}$ (Anexa 1). Deoarece $(23) \in H_{27}$, obținem:

$$A(x_1, x_2, x_3) = {}^{(23)}A(x_1, x_2, x_3) \qquad (2.29)$$

$$A(x_1, x_2, x_3) = A(x_1, x_3, x_2) \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2 + c,$$

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_2 = \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2. \qquad (2.30)$$

Egalitatea (2.30) este adevărată pentru $\forall x_2, x_3 \in Q$, deci este adevărată pentru $x_2 = 0$, unde 0 este elementul neutru al grupului $(Q, +)$. Substituind în (2.30), obținem $\alpha_2 = \alpha_3$. Notăm $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. În acest caz operația are forma:

$$A(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c. \tag{2.31}$$

$(14) \in H_{27}$. Prin urmare,

$$A(x_1, x_2, x_3) = {}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow A(A(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3) = x_1 \Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c) + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c = x_1$$

$$\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1 \alpha x_2 + \alpha_1 \alpha x_3 + \alpha_1 c + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c = x_1 \tag{2.32}$$

Ultima egalitate este adevărată pentru $x_1, x_2, x_3 \in Q$, inclusiv pentru $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, de unde avem

$$\alpha_1 c + c = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 c = Ic \tag{2.33}$$

Substituind (2.33) în (2.32), obținem:

$$\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1 \alpha x_2 + \alpha_1 \alpha x_3 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = x_1$$

Fie $x_1 = x_2 = 0$, atunci $\alpha_1 \alpha x_3 + \alpha x_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \alpha x_3 = \alpha I x_3 \Leftrightarrow \alpha_1 \alpha = \alpha I \Leftrightarrow \alpha_1 = I$. Prin urmare, operația (2.31), are forma

$$A(x_1, x_2, x_3) = Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c, Ix = -x. \tag{2.34}$$

(14)(23)$\in H_{27}$, ceea ce implică faptul că $A(x_1, x_2, x_3) = {}^{(14)(23)}A(x_1, x_2, x_3)$ sau

$$A(A(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3) = x_1 \Leftrightarrow I(Ix_1 + \alpha x_3 + \alpha x_2 + c) + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c = x_1,$$

$$x_1 + I\alpha x_3 + I\alpha x_2 + IC + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c = x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_1 - \text{adevărat.}$$

(12)(34)$\in H_{27}$. Prin urmare,

$$A(x_1, x_2, x_3) = {}^{(12)(34)}A(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow A\big(x_2, x_1, A(x_1, x_2, x_3)\big) = x_3.$$

$$Ix_2 + \alpha x_1 + \alpha(Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c) + c = x_3$$

$$Ix_2 + \alpha x_1 + \alpha I x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^2 x_3 + Ic + c = x_3 \Leftrightarrow Ix_2 + \alpha^2 x_2 + \alpha^2 x_3 = x_3.$$

Pentru $x_2 = 0$, avem $\alpha^2 x_3 = x_3 \Leftrightarrow \alpha^2 = \varepsilon$.

Deoarece $(12) \notin H_{27}$, reiese că $A(x_1, x_2, x_3) \neq {}^{(12)}A(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c \neq Ix_2 + \alpha x_2 + \alpha x_1 + c \Leftrightarrow Ix_1 + \alpha x_2 \neq Ix_2 + \alpha x_1$. Substituind $x_2 = 0$ în ultima relație, obținem: $\alpha x_1 \neq Ix_1 \Leftrightarrow \alpha \neq I$.

Prin urmare, T-quasigrupul ternar(Q, A) are exact trei parastrofi distincți, dacă există $\alpha \in Aut(Q, +), \alpha \neq I, \alpha^2 = \varepsilon, \alpha c = Ic$, astfel încât operația $A(x_1, x_2, x_3)$ are forma (2.34). □

Corolarul 2.3.1. *Există $T-$quasigrupuri ternare idempotente cu un maximum atins din trei parastrofi distincți.*

Într-adevăr, existența acestor $T-$quasigrupuri este asigurată de operația

$$A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3, \quad (2.35)$$

definită pe $\mathbb{Z}_m, m \in \mathbb{N}^*$, ce satisfice condițiile Propoziției 2.3.1. Însă un quasigrup ternar este idempotent dacă

$$A(x, x, x) = x. \quad (2.36)$$

Substituind (2.35) în (2,36), obținem $A(x, x, x) = x + x - x = x$. Prin urmare, (2.36) este satisfăcută pentru $\forall x \in \mathbb{Z}_m$. Deci $(\mathbb{Z}_m, A)$ este un $T-$quasigrup ternar idempotent. □

Exemplul 2.3.1. $T-$Quasigrupul ternar $(\mathbb{Z}_8,\ A)$ cu $T-$grupul $(\mathbb{Z}_8, +)$, unde $A(x_1, x_2, x_3) = \bar{5}x_1 + \bar{5}x_2 + \bar{7}x_3$, are exact trei parastrofi distincți.

Într-adevăr, determinăm mulțimea parastrofilor quasigrupului ternar, utilizând relațiile prezentate în Anexa 4:

$$\mathrm{A}(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(12)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(34)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(1423)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(12)(34)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(1324)}A(\mathrm{x}_1^3) =$$
$$= {}^{(13)(24)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(14)(23)}A(\mathrm{x}_1^3) = \bar{5}x_1 + \bar{5}x_2 + \bar{7}x_3,$$
$${}^{(123)}\mathrm{A}(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(14)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(23)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(142)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(134)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(243)}A(\mathrm{x}_1^3) =$$
$$= {}^{(1243)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(1342)}A(\mathrm{x}_1^3) = \bar{5}x_1 + \bar{7}x_2 + \bar{5}x_3,$$
$${}^{(132)}\mathrm{A}(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(13)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(24)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(124)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(143)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(234)}A(\mathrm{x}_1^3) =$$
$$= {}^{(1234)}A(\mathrm{x}_1^3) = {}^{(1432)}A(\mathrm{x}_1^3) = \bar{7}x_1 + \bar{5}x_2 + \bar{5}x_3.$$

Deci, quasigrupul $(\mathbb{Z}_8, A)$ are exact trei parastrofi distincți.

Corolarul 2.3.2. *Pentru orice* $m \geq 3$ *există quasigrupuri ternare de ordinul* m *cu un maximum atins din trei parastrofi distincți.*

Într-adevăr, considerăm quasigrupul ternar $(\mathbb{Z}_m, A)$: $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$. Conform Propoziției 2.3.1, $T-$quasigrupul ternar cu $T-$forma $((\mathbb{Z}_m, +), \varepsilon, \varepsilon, -\varepsilon, 0)$ are exact trei parastrofi distincți și anume

$$\mathrm{A} = {}^{(12)}A = {}^{(34)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(12)(34)}A = {}^{(1324)}A = {}^{(13)(24)}A = {}^{(14)(23)}A = x_1 + x_2 - x_3,$$
$${}^{(123)}\mathrm{A} = {}^{(14)}A = {}^{(23)}A = {}^{(142)}A = {}^{(134)}A = {}^{(243)}A = {}^{(1243)}A = {}^{(1342)}A = x_1 - x_2 + x_3,$$
$${}^{(132)}\mathrm{A} = {}^{(13)}A = {}^{(24)}A = {}^{(124)}A = {}^{(143)}A = {}^{(234)}A = {}^{(1234)}A = {}^{(1432)}A = -x_1 + x_2 + x_3.$$

În acest caz $\alpha \equiv 1\ (mod\ m) \Leftrightarrow \alpha^2 \equiv 1 (mod\ m)$ și $\alpha \not\equiv -1\ (mod\ m)$.

Arătăm acum că cei trei parastrofi sunt distincți pentru orice $m \geq 3$ prin metoda reducerii la absurd. Fie că $A(x_1, x_2, x_3) = {}^{(123)}A(x_2, x_2, x_3)$. Din forma parastrofilor respectivi avem:

$$x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 + x_3 \Leftrightarrow x_2 - x_3 = -x_2 + x_3.$$

Luând în ultima egalitate $x_3 = 0$, obținem $x_2 = -x_2$. Ultima relație este adevărată pentru $m =$

2, iar pentru celelalte valori ale modulului relația este falsă. Prin urmare, pentru $m \geq 3, m \in \mathbb{N}$, $A(x_1, x_2, x_3) \neq {}^{(123)}A(x_1, x_2, x_3)$. Analogic, obținem $A(x_1, x_2, x_3) \neq {}^{(132)}A(x_1, x_2, x_3)$. □

T-Quasigrupuri ternare cu un maximum atins din patru parastrofi distincți

În [80], McLeish studiază quasigrupurile ternare cu exact 4 parastrofi distincți și indică seturile de identități ce este necesar să fie satisfăcute de acest quasigrup. În acestă lucrare autoarea identifică patru seturi de identități realizarea cărora conduce la quasigrupuri ternare cu un maximum atins din patru parastrofi distincți. În [123, 124] autorii studiază quasigrupurile ternare liniare, peste un grup abelian, care posedă cel mult patru parastrofi distincți, abstracție făcând de izomorfismul subgrupurilor grupului S_4.

Analizând seturile de identități și modalitatea de egalitate a diferitor parastrofi, a fost selectată o mulțime de reprezentanți care, în cazul în care se verifică un singur set de identități, mulțimea formată din patru parastrofi distincți ai quasigrupului ternar (Q, A) este

$$\left\{A, {}^{(12)(34)}A, {}^{(13)(24)}A, {}^{(14)(23)}A\right\}.$$

Quasigrupurile ternare cu exact patru parastrofi distincți sunt caracterizate de subgrupurile de ordinul șase ale grupului S_4. Aceste subgrupuri sunt prezentate Anexa 1 și reprezintă sugrupurile $H_{22}, H_{23}, H_{24}, H_{25}$. Fiecare dintre aceste subgrupuri este izomorf grupului S_3, iar subgrupul H_{22} coincide chiar cu S_3. Fiecare dintre aceste subgrupuri este generat de un element de ordinul 3, $\alpha = (abc)$, și o transpoziție, $\beta = (ab)$, unde $a, b, c = \overline{1,4}$. Astfel,

$$H_{22} = S_3 = \langle (123), (12) \rangle, \qquad H_{24} \cong S_3 = \langle (134), (13) \rangle,$$

$$H_{23} \cong S_3 = \langle (124), (12) \rangle, \qquad H_{25} \cong S_3 = \langle (234), (23) \rangle.$$

Toate elementele acestor subgrupuri sunt prezentate în Anexa 1.

Teorema 2.3.1. *Un $T-$quasigrup ternar (Q, A), cu $T-$qrupul $(Q, +)$, are exact patru parastrofi distinți dacă și numai dacă există $\alpha \in Aut(Q, +)$ și un element $c \in Q$, astfel încât $T-$forma sa este una din următoarele:*

$$T_1 = \big((Q, +), \alpha, \alpha, \alpha, c\big), \quad T_2 = \big((Q, +), I, I, \alpha, c\big),$$

$$T_3 = \big((Q, +), I, \alpha, I, c\big), \quad T_4 = \big((Q, +), \alpha, I, I, c\big),$$

unde $Ix = -x$, $\alpha \neq I$.

Demonstrație. Fie (Q, A) un $3-T-$quasigrup cu $T-$forma $T = ((Q, +), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, c)$ și fie $H \in \left\{H_i, i = \overline{22, 25}\right\}$, unde $H = \{\sigma \in S_4 \mid {}^{\sigma}A = A\}$.

1) Dacă $H = H_{22} = \langle (123), (12) \rangle = \{\varepsilon, (123), (132), (12), (13), (23)\}$, atunci avem $(12), (13) \in H$, prin urmare $A = {}^{(12)}A$ și $A = {}^{(13)}A$, de unde obținem:

$$\begin{cases}\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+c=\alpha_1x_2+\alpha_2x_1+\alpha_3x_3+c\\ \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+c=\alpha_1x_3+\alpha_2x_2+\alpha_3x_1+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=\alpha_1x_2+\alpha_2x_1\\ \alpha_1x_1+\alpha_3x_3=\alpha_1x_3+\alpha_3x_1.\end{cases}$$

Luând $x_1=0$, ultimele două egalități implică $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$. Notând $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$, operația A ia forma:

$$A(x_1,x_2,x_3)=\alpha x_1+\alpha x_2+\alpha x_3+c. \tag{2.37}$$

Deoarece, $(14)\notin H_{22}\Rightarrow A\neq {}^{(14)}A\Rightarrow A(A(x_1,x_2,x_3),x_2,x_3)\neq x_1 \Rightarrow$

$$\alpha(\alpha x_1+\alpha x_2+\alpha x_3+c)+\alpha x_2+\alpha x_3+c\neq x_1.$$

Notând $\alpha x_2+\alpha x_3+c$ prin y din ultima inegalitate obținem:

$$\alpha(\alpha x_1+y)+y\neq x_1,$$

care pentru $\alpha=I$, implică $-(-x_1+y)+y\neq x_1\Leftrightarrow x_1\neq x_1$, ceea ce este o contradicție. Prin urmare, $\alpha\neq I$, iar $T-$forma $T-$quasigrupului este $T_1=\big((Q,+),\alpha,\alpha,\alpha,c\big)$.

2) Dacă $H=H_{23}=\langle(124),(12)\rangle=\{\varepsilon,(124),(142),(12),(14),(24)\}$, atunci avem

$(12)\in H$, prin urmare $A={}^{(12)}A$, de unde obținem:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+c=\alpha_1x_2+\alpha_2x_1+\alpha_3x_3+c\Leftrightarrow\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=\alpha_1x_2+\alpha_2x_1.$$

Luând $x_1=0$, ultima egalitate implică $\alpha_1=\alpha_2$. Deoarece $(14)\in H$, prin urmare $A={}^{(14)}A$, deci:

$$A(A(x_1,x_2,x_3),x_2,x_3)=x_1\Leftrightarrow\alpha_1(\alpha_1x_1+\alpha_1x_2+\alpha_3x_3+c)+\alpha_1x_2+\alpha_3x_3+c=x_1.$$

Considerând $x_1=x_2=x_3=0$, obținem $\alpha_1c+c=0$, iar din $x_1=x_2=0$ avem

$$\alpha_1(\alpha_3x_3)+\alpha_3x_3=0\Leftrightarrow\alpha_1(\alpha_3x_3)=I(\alpha_3x_3)\Leftrightarrow\alpha_1=I.$$

Notând $\alpha_3=\alpha$, operația A ia forma:

$$A(x_1,x_2,x_3)=Ix_1+Ix_2+\alpha x_3+c. \tag{2.38}$$

Deoarece, $(13)\notin H_{22}$, avem: $A\neq {}^{(13)}A\Rightarrow A(x_1,x_2,x_3)\neq A(x_3,x_2,x_1) \Rightarrow$

$$Ix_1+Ix_2+\alpha x_3+c\neq Ix_3+Ix_2+\alpha x_1+c\Leftrightarrow Ix_1+\alpha x_3\neq Ix_3+\alpha x_1.$$

Luând $x_1=0$, obținem $\alpha\neq I$, iar T-forma T-quasigrupului este $T_2=\big((Q,+),I,I,\alpha,c\big)$.

3) Dacă $H=H_{24}=\langle(134),(13)\rangle=\{\varepsilon,(134),(143),(13),(14),(34)\}$, atunci $(13)\in H$, prin urmare $A={}^{(13)}A$, de unde obținem:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+c=\alpha_1x_3+\alpha_2x_2+\alpha_3x_1+c\Leftrightarrow\alpha_1x_1+\alpha_3x_3=\alpha_1x_3+\alpha_3x_1.$$

Luând $x_1=0$, ultima egalitate implică $\alpha_1=\alpha_3$. Deoarece $(14)\in H$, prin urmare $A={}^{(14)}A$, de unde obținem:

$$A(A(x_1,x_2,x_3),x_2,x_3)=x_1\Leftrightarrow\alpha_1(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_1x_3+c)+\alpha_1x_2+\alpha_1x_3+c=x_1.$$

Din $x_1=x_2=x_3=0$, rezultă $\alpha_1c+c=0$, iar din $x_1=x_3=0$ avem

$$\alpha_1(\alpha_2x_2)+\alpha_2x_2=0\Leftrightarrow\alpha_1(\alpha_2x_2)=I(\alpha_2x_2)\Leftrightarrow\alpha_1=I.$$

Notând $\alpha_2=\alpha$, operația ia forma $A(x_1,x_2,x_3)=Ix_1+\alpha x_2+Ix_3+c$. Deoarece $(12)\notin H_{23}$, avem:

$$A \neq {}^{(23)}A \Rightarrow A(x_1, x_2, x_3) \neq A(x_3, x_2, x_1) \Leftrightarrow Ix_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + c \neq Ix_1 + \alpha x_3 + Ix_2 + c \Leftrightarrow$$

$$\alpha x_2 + Ix_3 \neq \alpha x_3 + Ix_2.$$

Luând $x_3 = 0$, obținem $\alpha \neq I$, iar $T-$forma $T-$quasigrupului este $T_3 = \big((Q, +), I, \alpha, I, c\big)$.

4) Dacă $H = H_{25} = \langle(234), (23)\rangle = \{\varepsilon, (234), (243), (23), (24), (34)\}$, atunci avem $(23) \in H$, prin urmare $A = {}^{(23)}A$, de unde obținem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2 + c \Leftrightarrow \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2.$$

Luând $x_2 = 0$, ultima egalitate implică $\alpha_2 = \alpha_3$. Deoarece $(24) \in H$, avem $A = {}^{(24)}A$, de unde obținem:

$$A(x_1, A(x_1, x_2, x_3), x_3) = x_2 \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + c) + \alpha_2 x_3 + c = x_2.$$

Considerând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, obținem $\alpha_2 c + c = 0$, iar din $x_2 = x_3 = 0$ avem

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_2(\alpha_1 x_1) = I(\alpha_1 x_1) \Leftrightarrow \alpha_2 = I.$$

Notând $\alpha_1 = \alpha$, operația ia forma $A(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + Ix_2 + Ix_3 + c$. Deoarece $(12) \notin H_{25}$, avem:

$$A \neq {}^{(12)}A \Rightarrow A(x_1, x_2, x_3) \neq A(x_2, x_1, x_3) \Leftrightarrow \alpha x_1 + Ix_2 + Ix_3 + c \neq \alpha x_2 + Ix_1 + Ix_3 + c$$

$$\alpha x_1 + Ix_2 \neq \alpha x_2 + Ix_1.$$

Luând $x_2 = 0$, obținem $\alpha \neq I$, iar $T-$forma $T-$quasigrupului este $T_4 = \big((Q, +), \alpha, I, I, c\big)$.□

Corolarul 2.3.3. *Dacă operația A a unui T-quasigrup ternar $(\mathbb{Z}_n,\ A)$, cu T-grupul $(\mathbb{Z}_n,\ +)$, are una din formele $A_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{a}x_1 + \bar{a}x_2 + \bar{a}x_3 + \bar{c}$, $A_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + \bar{a}x_2 - x_3 + \bar{c}$, $A_3(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_2 + \bar{a}x_3 + \bar{c}$, $A_4(x_1, x_2, x_3) = \bar{a}x_1 - x_2 - x_3 + \bar{c}$, unde $(a, n) = 1$, $a \neq n - 1$, atunci $(\mathbb{Z}_n,\ A)$ are exact patru parastrofi distincți.*

Demonstrație. Într-adevăr, determinând mulțimea parastrofi în baza relațiilor din Anexa 4, obținem mulțimea parastrofilor distincți ai quasigrupului $(\mathbb{Z}_n, A_1)$ este:

$$A_1 = {}^{(12)}A_1 = {}^{(13)}A_1 = {}^{(23)}A_1 = {}^{(123)}A_1 = {}^{(132)}A_1 = \bar{a}x_1 + \bar{a}x_2 + \bar{a}x_3 + \bar{c},$$

$${}^{(14)(23)}A_1 = {}^{(124)}A_1 = {}^{(14)}A_1 = {}^{(134)}A_1 = {}^{(1234)}A_1 = {}^{(1324)}A_1 = \bar{a}^{-1}x_1 - x_2 - x_3 - \bar{a}^{-1}\bar{c},$$

$${}^{(13)(24)}A_1 = {}^{(142)}A_1 = {}^{(243)}A_1 = {}^{(24)}A_1 = {}^{(1423)}A_1 = {}^{(1342)}A_1 = -x_1 + \bar{a}^{-1}x_2 - x_3 - \bar{a}^{-1}\bar{c},$$

$${}^{(12)(34)}A_1 = {}^{(34)}A_1 = {}^{(234)}A_1 = {}^{(243)}A_1 = {}^{(1243)}A_1 = {}^{(1432)}A_1 = -x_1 - x_2 + \bar{a}^{-1}x_3 - \bar{a}^{-1}\bar{c}.$$

Este evident că, pentru $(a, n) \neq 1$, atunci operația $A_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{a}x_1 + \bar{a}x_2 + \bar{a}x_3 + \bar{c}$ nu definește un quaqigrup pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$. Într-adevăr, pentru ca operația $A_1(x_1, x_2, x_3)$ să definească un quasigrup este necesar ca ecuațiile

$$A_1(x_1, a_2, a_3) = b_1, \qquad A_1(a_1, x_2, a_3) = b_2, \qquad A_1(a_1, a_2, x_3) = b_3,$$

unde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ sunt elemente fixate în $\mathbb{Z}_n$, să fie rezolvabile univoc în această mulțime.

$$ax_1 + aa_2 + aa_3 + c = b \Leftrightarrow ax_1 = b - aa_2 - aa_3 - \bar{c}.$$

Pentru ca ultima ecuație să admită soluție unică este necesar și suficient ca elementul a să fie simetrizabil ceea ce este posibil doar dacă $(a, n) = 1.$ Atunci soluția ecuației este

$$x_1 = a^{-1}(b - aa_2 - aa_3 - c).$$

Pentru celelalte două ecuații obținem, dacă $(a, n) = 1$, atunci elementul a este simetrizabil și soluțiile ecuațiilor sunt

$$x_2 = a^{-1}(b_2 - aa_1 - aa_3 - c),$$

$$x_3 = a^{-1}(b_3 - aa_1 - aa_2 - c).$$

Dacă $a = n - 1$, atunci $a^{-1} = n - 1$, iar quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A_1)$ este $TS - T$ −quasigrup.

Analog, pentru T −quasigrupurile $(\mathbb{Z}_n, A_2), (\mathbb{Z}_n, A_3), (\mathbb{Z}_n, A_4)$, utilizând relațiile prezentate în Anexa 4, obținem mulțimea parastrofilor distincți. □

Următorul corolar furnizează unele informații cu privire la spectrul quasigrupurilor ternare cu exact 4 parastrofi distincți. Acest rezultat a fost obținut de către McLeish și prezentat în Propoziția 1.2.1. La demonstrația Propoziției 1.2.1, cu referire la spectrul quasigrupurilor ternare cu exact patru parastrofi distincți, McLeish a utilizat quasigrupul (Z_n, A): $A(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 - x_3$, ce a condus la condiția că acest quasigrup are exact patru parastrofi distincți pentru orice ordin impar $n, n > 3.$ Pentru $n = 3$ și ordinele pare McLeish a utilizat construcții combinatorice.

Corolarul 2.3.4. [80] *Există quasigrupuri ternare finite de orice ordin impar $q \geq 3$ ce au exact 4 parastrofi distincți.*

Mai jos prezentăm un exemplu de T-quasigrup ternar cu exact patru parastrofi distincți. Considerăm quasigrupul $(\mathbb{Z}_q, A)$, unde $A(x_1, x_2, x_3 = x_1 + x_2 + x_3$, $(n, 2) = 1$. Cei 24 de parastrofi distincți se împart în patru clase de parastrofi egali între ei:

$$A = {}^{(12)}A = {}^{(13)}A = {}^{(23)}A = {}^{(123)}A = {}^{(132)}A = x_1 + x_2 + x_3,$$

$${}^{(14)}A = {}^{(124)}A = {}^{(14)(23)}A = {}^{(134)}A = {}^{(1234)}A = {}^{(1324)}A = x_1 - x_2 - x_3,$$

$${}^{(24)}A = {}^{(142)}A = {}^{(243)}A = {}^{(13)(24)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(1342)}A = -x_1 + x_2 - x_3,$$

$${}^{(34)}A = {}^{(12)(34)}A = {}^{(234)}A = {}^{(243)}A = {}^{(1243)}A = {}^{(1432)}A = -x_1 - x_2 + x_3. \quad \square$$

Observăm că, alte exemple de quasigrupuri ternare cu exact patru parastrofi distincți sunt $(\mathbb{Z}_5, A_1)$ și $(\mathbb{Z}_9, A_2)$, unde $A_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$ și $A_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 4x_2 + 4x_3$.

T-Quasigrupuri ternare cu exact șase parastrofi distincți

Quasigrupurile ternare cu exact șase parastrofi distincți sunt studiate de către McLeish utilizând șapte seturi de identități. În scopul dat sunt construite exemple cu ajutorul cărora este obținută informația referitoare la spectrul acestor quasigrupuri. La fel, în [123, 124] sunt studiate quasigrupurile ternare liniare, peste un grup abelian, prin intermediul subgrupurilor grupului S_4.

Sokhatsky și Pirus arată că quasigrupurile ternare cu cel mult șase parastrofi distincți sunt date de subgrupurile grupului S_4 izomorfe cu C_4, K_4, Z_4.

În dependență de setul de identități ce sunt satisfăcute în quasigrupul ternar, descrise de McLeish, pot fi selectate diverse seturi de reprezentanți ai claselor de resturi modulo H ce definesc seturi maximale de parastrofi distincți. Seturile posibile de parastofi distincți sunt:

1) $\{A, {}^{(12)}A, {}^{(13)}A, {}^{(23)}A, {}^{(123)}A, {}^{(132)}A\}$ care este formată doar din parastrofii principali ai acestui quasigrup;
2) $\{A, {}^{(123)}A, {}^{(132)}A, {}^{(142)}A, {}^{(234)}A, {}^{(13)(24)}A\}$ care conține trei parastrofi principali;
3) $\{A, {}^{(12)}A, {}^{(23)}A, {}^{(14)}A, {}^{(34)}A, {}^{(12)(34)}A\}$ care conține, de asemenea, trei parastrofi principali.

Seturile de identități descrise de McLeish reprezintă de fapt subgrupurile de ordinul 4 ale grupului S_4. Aceste subgrupuri sunt prezentate în Anexa 1 și anume

$$H_{15} = \langle(1234)\rangle, \qquad H_{16} = \langle(1243)\rangle, \qquad H_{17} = \langle(1324)\rangle,$$
$$H_{18} = \langle(12),(34)\rangle, \qquad H_{19} = \langle(13),(24)\rangle, \qquad H_{20} = \langle(14),(23)\rangle,$$
$$H_{21} = \langle(12)(34),(13)(24)\rangle.$$

Sugbrupurile $H_{15} - H_{17}$ sunt izomorfe grupului ciclic Z_4, iar subgrupurile $H_{18} - H_{21}$ sunt izomorfe grupului Klein K_4.

În continuare vom stabili condițiile necesare și suficiente ca un T-quasigrup ternar să admită exact șase parastrofi distincți și vom determina T-formele acestor quasigrupuri.

Teorema 2.3.2. *T −quasigrupul ternar (Q,A) cu T-grupul $(Q,+)$ și cu $H = \{\sigma| {}^{\sigma}A = A\} \cong Z_4$, are exact șase parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha \in Aut(Q,+)$ și un element $c \in Q$, astfel încât T-forma sa este una dintre următoarele:*

$$T_1 = \big((Q,+),\alpha, I\alpha^2, \alpha^3, c\big), T_2 = \big((Q,+), I\alpha^2, \alpha^3, \alpha, c\big),\ T_3 = \big((Q,+),\alpha,\alpha^3, I\alpha^2, c\big),$$

unde $\alpha c = Ic, Ix = -x, \alpha^2 \neq \varepsilon, \alpha^4 = \varepsilon$.

Demonstrație. Fie (Q,A) un T −quasigrup ternar cu T −forma $T = ((Q,+),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,c)$ și fie $H \in \{H_i, i = \overline{15,17}\}$, unde $H = \{\sigma \in S_4\, |{}^{\sigma}A = A\}$.

1) Dacă $H = H_{15} = \langle(1234)\rangle = \{\varepsilon,(1234),(13)(24),(1432)\}$, atunci avem $(1234) \in H$, prin urmare $A = {}^{(1234)}A$, ce implică $A(A(x_1,x_2,x_3),x_1,x_2) = x_3$, de unde avem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c) + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + c = x_3. \qquad (2.39)$$

Luând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ultima egalitate implică $\alpha_1 c + c = 0$. Considerând $x_1 = x_3 = 0$ în (2.39), iar apoi $x_2 = x_3 = 0$ și $x_1 = x_2 = 0$, obținem:

$$\begin{cases}\alpha_1(\alpha_2 x_2)+\alpha_3 x_3=0,\\ \alpha_1(\alpha_1 x_1)+\alpha_2 x_1=0,\\ \alpha_1(\alpha_3 x_3)=x_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2\alpha_1=I\alpha_3,\\ \alpha_2=I\alpha_1^2,\\ \alpha_3=\alpha_1^{-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_3=\alpha_1^3,\\ \alpha_2=I\alpha_1^2,\\ \alpha_1^4=\varepsilon.\end{cases}$$

Prin urmare, notând $\alpha_1=\alpha$, obținem

$$A(x_1,x_2,x_3)=\alpha x_1+I\alpha^2 x_2+\alpha^3 x_3+c. \tag{2.40}$$

Deoarece $(13)\notin H_{15}$, avem:

$$A(x_1,x_2,x_2)\neq {}^{(13)}A(x_1,x_2,x_3)\Leftrightarrow A(x_1,x_2,x_3)\neq A(x_3,x_2,x_1)$$

$$\alpha x_1+I\alpha^2 x_2+\alpha^3 x_3+c\neq \alpha x_3+I\alpha^2 x_2+\alpha^3 x_1+c\Leftrightarrow \alpha x_1+\alpha^3 x_3\neq \alpha x_3+\alpha^3 x_1.$$

Substituind în ultima inegalitate $x_1=0$, obținem $\alpha^3\neq\alpha\Rightarrow\alpha^2\neq\varepsilon$. Deci, $T-$ forma $T-$quasigrupului este $T_1=\left((Q,+),\alpha,I\alpha^2,\alpha^3,c\right)$, $\alpha c=Ic,\alpha^2\neq\varepsilon,\alpha^4=\varepsilon$.

2) Dacă $H=H_{16}=\langle(1243)\rangle=\{\varepsilon,(1243),(14)(23),(1342)\}$, atunci avem $(1243)\in H$, prin urmare $A={}^{(1243)}A$, ce implică $A(x_3,x_1,A(x_1,x_2,x_3))=x_2$, de unde avem:

$$\alpha_1 x_3+\alpha_2 x_1+\alpha_3(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3+c)+c=x_2. \tag{2.41}$$

Luând $x_1=x_2=x_3=0$, ultima egalitate implică $\alpha_3 c+c=0$. Considerând $x_i=x_j=0$, $i\neq j$, $i,j=1,2,3$ în (2.41), obținem:

$$\begin{cases}\alpha_1 x_3+\alpha_3(\alpha_3 x_3)=0,\\ \alpha_2 x_1+\alpha_3(\alpha_1 x_1)=0,\\ \alpha_3(\alpha_2 x_2)=x_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=I\alpha_3^2,\\ \alpha_2=\alpha_3^3\\ \alpha_3^4=\varepsilon.\end{cases}$$

Prin urmare, notând $\alpha_3=\alpha$, prin urmare

$$A(x_1,x_2,x_3)=I\alpha^2 x_1+\alpha^3 x_2+\alpha x_3+c. \tag{2.42}$$

Deoarece $(23)\notin H_{16}$, avem:

$$A(x_1,x_2,x_2)\neq {}^{(23)}A(x_1,x_2,x_3)\Leftrightarrow A(x_1,x_2,x_3)\neq A(x_1,x_3,x_2)$$

$$I\alpha^2 x_1+\alpha^3 x_2+\alpha x_3+c\neq I\alpha^2 x_1+\alpha^3 x_3+\alpha x_2+c\Leftrightarrow \alpha^3 x_2+\alpha x_3\neq \alpha^3 x_3+\alpha x_2.$$

Substituind în ultima inegalitate $x_3=0$, obținem $\alpha^3\neq\alpha\Rightarrow\alpha^2\neq\varepsilon$. Deci, $T-$ forma $T-$quasigrupului este $T_2=\left((Q,+),I\alpha^2,\alpha^3,\alpha,c\right)$, $\alpha c=Ic,\alpha^2\neq\varepsilon,\alpha^4=\varepsilon$.

3) Dacă $H=H_{17}=\langle(1324)\rangle=\{\varepsilon,(1324),(12)(34),(1423)\}$, atunci avem $(1324)\in H$, prin urmare $A={}^{(1324)}A$, ce implică $A(A(x_1,x_2,x_3),x_3,x_1)=x_2$, de unde avem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3+c)+\alpha_2 x_3+\alpha_3 x_1+c=x_2. \tag{2.43}$$

Punând $x_1=x_2=x_3=0$ în (2.43), avem $\alpha_1 c+c=0$. Considerând $x_i=x_j=0$ în (2.43), unde $i\neq j$, $i,j=1,2,3$, obținem:

$$\begin{cases}\alpha_1(\alpha_3 x_3)+\alpha_2 x_3=0,\\ \alpha_1(\alpha_1 x_1)+\alpha_3 x_1=0,\\ \alpha_1(\alpha_2 x_2)=x_2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2=I\alpha_3\alpha_1,\\ \alpha_3=I\alpha_1^2,\\ \alpha_1=\alpha_2^{-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2=\alpha_1^3,\\ \alpha_3=I\alpha_1^2,\\ \alpha_1^4=\varepsilon.\end{cases}$$

Notând $\alpha_1 = \alpha$, obținem:

$$A(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \alpha^3 x_2 + I\alpha^2 x_3 + c. \quad (2.44)$$

Deoarece $(12) \notin H_{17}$, avem:

$$A(x_1, x_2, x_2) \neq {}^{(12)}A(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow A(x_1, x_2, x_3) \neq A(x_2, x_1, x_3).$$

Aplicând asupra ultimei inegalități (2.44), avem:

$$\alpha x_1 + \alpha^3 x_2 + I\alpha^2 x_3 + c \neq \alpha x_2 + \alpha^3 x_1 + I\alpha^2 x_3 + c \Leftrightarrow \alpha x_1 + \alpha^3 x_2 \neq \alpha x_2 + \alpha^3 x_1,$$

Substituind în ultima inegalitate $x_1 \neq 0$, obținem $\alpha^3 \neq \alpha \Rightarrow \alpha^2 \neq \varepsilon$. Deci, $T-$ forma $T-$quasigrupului este $T_3 = \big((Q,+), \alpha, \alpha^3, I\alpha^2, c\big)$, $\alpha c = Ic, \alpha^2 \neq \varepsilon, \alpha^4 = \varepsilon$□

Observație. *$T-$quasigrupul ternar (Q, A) cu $H = \{\sigma |\, {}^{\sigma}A = A\} \cong \mathbb{Z}_4$ are toți cei șase parastrofi principali distincți.*

Exemplul 2.3.2. $T-$Quasigrupul ternar $(\mathbb{Z}_5, A)$, $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{2}x_1 + x_2 + \bar{3}x_3$, are exact șase parastrofi distincți. Într-adevăr, în acest caz avem:

$$\alpha: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5, \alpha(\bar{1}) = \bar{2},$$

ce verifică condițiile $I\alpha^2 = \alpha^4 = \varepsilon$, $\alpha^3(\bar{1}) = \bar{3}\,, \alpha c = Ic \Leftrightarrow 2c \equiv 4c(\,mod\ 5) \Leftrightarrow 2c \equiv 0\ (mod\ 5) \Leftrightarrow c \equiv 0\ (mod\ 5)$.

Determinând mulțimea parastrofilor (Anexa 5), obținem:

$$A = {}^{(1234)}A = {}^{(1432)}A = {}^{(13)(24)}A = \bar{2}x_1 + x_2 + \bar{3}x_3,$$

$${}^{(12)}A = {}^{(134)}A = {}^{(243)}A = {}^{(1423)}A = x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{3}x_3,$$

$${}^{(13)}A = {}^{(24)}A = {}^{(14)(23)}A = {}^{(12)(34)}A = \bar{3}x_1 + x_2 + \bar{2}x_3,$$

$${}^{(23)}A = {}^{(124)}A = {}^{(143)}A = {}^{(1342)}A = \bar{2}x_1 + \bar{3}x_2 + x_3,$$

$${}^{(123)}A = {}^{(34)}A = {}^{(1324)}A = {}^{(142)}A = x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{2}x_3,$$

$${}^{(132)}A = {}^{(14)}A = {}^{(234)}A = {}^{(1243)}A = \bar{3}x_1 + \bar{2}x_2 + x_3.$$

Mai mult, toți cei șase parastrofi distincți reprezintă parastrofii principali ai quasigrupului ce sunt și idempotenți. Într-adevăr,

$$A(x, x, x) = \bar{2}x + x + \bar{3}x \equiv x\ (mod\ 5). \square$$

Corolarul 2.3.5. *Nu există $T-$ quasigrupuri ternare de forma $(\mathbb{Z}_n, A)$, cu T-grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ și cu $H = \{\sigma |\, {}^{\sigma}A = A\} \cong \mathbb{Z}_4$,care au exact șase parastrofi distincți, pentru orice $n \in \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$.*

Demonstrație. Într-adevăr, pentru a arăta inexistența quasigrupurilor respective, este suficient de arătat că elemente în grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ ce satisfac condițiile prezentate în Teorema 2.3.2. nu sunt. Operațiile ternare în acest inel au forma:

$$A(x_1, x_2, x_3) = \overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2 + \overline{a_3}x_3 + \bar{c}.$$

Pentru ca operația să definească un quasigrup este necesar și suficient $(a_i, n) = 1, i = 1, 2, 3$. Conform Teoremei 2.2.2, acest quasigrup are exact șase parastrofi distincți dacă și numai dacă coeficienții variabilelor sunt $\bar{a}, \overline{(n-1)a^2}, \bar{a}^3, \bar{c}$, unde $\bar{a}^4 = \bar{1}, \bar{a}^2 = \bar{1}, \overline{ac} = \overline{(n-1)c}$. Elementul $\bar{a} = \bar{0}$ nu caracterizează o operație de quasigrup pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Elementul $\bar{a} = \bar{1}$ nu satisface condiția $\bar{a}^2 \neq \bar{1}$. Deci, vor fi verificate celelalte elemente ale grupului. Elementul $\bar{a} = \bar{2}$ nu caracterizează operație de quasigrup pentru $n = 4, 6, 8$.

Fie $n = 3$, atunci $\bar{a} \in \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Elementul $\bar{a} = \bar{2}$ implică relația $\bar{2}^2 = \bar{1}$. Ceea ce este o contradicție condițiilor prezentate mai sus. Pentru $n = 4$, elementul $\bar{a} = \bar{3}$ implică relația $\bar{3}^2 = \bar{1}$ $-$ contradicție.

Pentru $n = 6$, avem $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Elementele $\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ nu definesc operații de quasigrup. Elementul $\bar{a} = \bar{5}$ implică relația $\bar{5}^2 = \bar{1}$, ce este o contradicție.

Pentru $n = 7$, avem $\bar{a} \in \mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$. Fiecare dintre elementele $\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$ nu satisfac condiția $\bar{a}^4 = \bar{1}$, iar elementul $\bar{6}$ nu satisface condiția $\bar{6}^2 \neq \bar{1}$. Deci, peste $\mathbb{Z}_7$ nu există T-quasigrupuri ternare cu exact șase parastrofi distincți cu

$$H = \{\sigma |\, {}^{\sigma}A = A\} \cong Z_4.$$

Pentru $n = 8$, avem $\bar{a} \in \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Elementele $\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}$ nu definesc operații de quasigrup. Fiecare dintre elementele $\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}$ nu satisfac condiția $\bar{a}^2 \neq 1$. Deci, în $\mathbb{Z}_8$ nu există $T-$quasigrupuri ternare cu exact șase parastrofi distincți cu $H = \{\sigma |\, {}^{\sigma}A = A\} \cong Z_4$. Analog, în $\mathbb{Z}_9$, elementele $\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}$ nu satisfac condiția $\bar{a}^4 = \bar{1}$. □

Teorema 2.3.3. *$T-$quasigrupul ternar (Q, A) cu T-grupul (Q,+) și cu $H = \{\sigma \in S_4 |\, {}^{\sigma}A = A\} = H_i$, $i = 18, 19, 20$, are exact șase parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha \in Aut(Q, +)$ și un element $c \in Q$, astfel încât $T-$forma sa este una dintre următoarele $T_4 = ((Q, +), \alpha, \alpha, I, c)$, $T_5 = ((Q, +), \alpha, I, \alpha, c)$, $T_6 = ((Q, +), I, \alpha, \alpha, c)$, unde $\alpha^2 \neq \varepsilon$.*

Demonstrație. Fie (Q, A) un $T-$quasigrup cu $T-$forma $T = ((Q, +), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, c)$ și fie $H \in \{H_i, i = \overline{18, 20}\}$, unde $H = \{\sigma \in S_4 |\, {}^{\sigma}A = A\}$.

1) Dacă $H = H_{18} = \langle(12), (34)\rangle = \{\varepsilon, (12), (34), (12)(34)\}$, atunci din $(12) \in H$, avem $A = {}^{(12)}A$, ce implică $\alpha_1 = \alpha_2$, iar din $(34) \in H$, obținem $A = {}^{(34)}A$, ce implică

$$A(x_1, x_2, A(x_1, x_2, x_3)) = x_3 \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c) + c = x_3.$$

Luând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ultima egalitate implică $\alpha_3 c + c = 0$. Considerând $x_1 = x_3 = 0$, obținem $\alpha_2 x_2 + \alpha_3(\alpha_2 x_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha_3(\alpha_2 x_2) = I(\alpha_2 x_2) \Leftrightarrow \alpha_3 = I$. Notând $\alpha_1 = \alpha$, operația are forma:

$$A(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + c. \tag{2.45}$$

Deoarece $(14) \notin H_{18}$, reiese că

$$A(x_1, x_2, x_3) \neq {}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow A(A(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3) \neq x_1.$$

$$\alpha(\alpha x_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + c) + \alpha x_2 + Ix_3 + c \neq x_1.$$

Notând $\alpha x_2 + Ix_3 + c = y$, din ultima inegalitate avem $\alpha(\alpha x_1 + y) + y \neq x_1$. Considerând $y = 0$, obținem $\alpha^2 x_1 \neq x_1 \Rightarrow \alpha^2 \neq \varepsilon$. Deci, $T-$quasigrupului ternar (Q, A) are $T-$forma $T_4 = \big((Q, +), \alpha, \alpha,\ I, c\,\big)$, $\alpha^2 \neq \varepsilon$.

2) Dacă $H = H_{19} = \langle(13), (24)\rangle = \{\varepsilon, (13), (24), (13)(24)\}$, atunci din $(13) \in H$, avem $A = {}^{(13)}A$, ce implică $\alpha_1 = \alpha_3$, iar din $(24) \in H$, obținem $A = {}^{(24)}A$, ce implică

$$A(x_1, A(x_1, x_2, x_3), x_3) = x_2 \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c) + \alpha_3 x_3 + c = x_2.$$

Notând $\alpha_3 x_3 + c = y$, ultima egalitate are forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + y) + y = x_2$. Considerând $x_2 = y = 0$, obținem $\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_2(\alpha_1 x_1) = I(\alpha_1 x_1) \Leftrightarrow \alpha_2 = I$. Notând $\alpha_1 = \alpha$, operația are forma:

$$A(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + c. \tag{2.46}$$

Deoarece $(14) \notin H_{19}$, reiese că

$$A(x_1, x_2, x_3) \neq {}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow A(A(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3) \neq x_1.$$

$$\alpha(\alpha x_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + c) + Ix_2 + \alpha x_3 + c \neq x_1.$$

Notând $\alpha x_2 + Ix_3 + c = y$, din ultima inegalitate avem $\alpha(\alpha x_1 + y) + y \neq x_1$. Considerând $y = 0$, obținem $\alpha^2 x_1 \neq x_1 \Rightarrow \alpha^2 \neq \varepsilon$. Deci, $T-$ forma $T-$ quasigrupului este $T_5 = \big((Q, +), \alpha, I, \alpha, , c\,\big)$, $\alpha^2 \neq \varepsilon$.

3) Dacă $H = H_{20} = \langle(14), (23)\rangle = \{\varepsilon, (14), (23), (14)(23)\}$, atunci din $(23) \in H$, avem $A = {}^{(23)}A$, ce implică $\alpha_2 = \alpha_3$, iar din $(14) \in H$, obținem $A = {}^{(14)}A$, ce implică

$$A(A(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3) = x_1 \Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c = x_1.$$

Notând $\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c = y$, ultima egalitate are forma $\alpha_1(\alpha_1 x_1 + y) + y = x_1$. Considerând $x_1 = 0$, obținem $\alpha_1 y + y = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = I$. Notând $\alpha_2 = \alpha$, operația are forma:

$$A(x_1, x_2, x_3) = Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c. \tag{2.47}$$

Deoarece $(24) \notin H_{20}$, reiese că

$$A(x_1, x_2, x_3) \neq {}^{(24)}A(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow A(x_1, A(x_1, x_2, x_3), x_3) \neq x_2.$$

$$Ix_1 + \alpha(Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c) + \alpha x_3 + c \neq x_2.$$

Notând $\alpha x_3 + c = y$ și substituind în ultima inegalitate, avem $Ix_1 + \alpha(Ix_1 + \alpha x_2 + y) + y \neq x_2$. Considerând $x_1 = y = 0$, obținem $\alpha^2 x_2 \neq x_2 \Rightarrow \alpha^2 \neq \varepsilon$. Deci, $T-$ forma $T-$quasigrupului este $T_6 = \big((Q, +), I, \alpha, \alpha\,, c\,\big)$, $\alpha^2 \neq \varepsilon$. □

Exemplul 2.3.3. $T-$Quasigrupul ternar $(\mathbb{Z}_7, A)$, $A(x_1,x_2,x_3) = \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{6}x_3 + \bar{2}$ cu are exact șase parastrofi distincți. Într-adevăr, în acest caz avem:

$$\alpha \equiv 2\ (mod\ 7), \qquad I \equiv 6\ (mod\ 7), \qquad \alpha^{-1} \equiv 4\ (mod\ 7), \qquad 2I \equiv 5\ (mod\ 7)$$

Determinând mulțimea parastrofilor (Anexa 5), obținem:

$$A = {}^{(12)}A = {}^{(34)}A = {}^{(12)(34)}A = \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{6}x_3 + \bar{2},$$

$${}^{(13)}A = {}^{(132)}A = {}^{(143)}A = {}^{(1432)}A = \bar{6}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{2},$$

$${}^{(23)}A = {}^{(123)}A = {}^{(243)}A = {}^{(1243)}A = \bar{2}x_1 + \bar{6}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{2},$$

$${}^{(14)}A = {}^{(142)}A = {}^{(134)}A = {}^{(1342)}A = \bar{4}x_1 + \bar{6}x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{6},$$

$${}^{(24)}A = {}^{(124)}A = {}^{(234)}A = {}^{(1234)}A = \bar{6}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{6},$$

$${}^{(1324)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(13)(24)}A = {}^{(14)(23)}A = \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{6}x_3 + \bar{6}. \square$$

Teorema 2.3.4. *$T-$quasigrupul ternar (Q, A) cu $T-$qrupul $(Q, +)$ și cu $H = \{\sigma |\, {}^{\sigma}A = A\} = H_{21} = K_4$, are exact șase parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha, \beta \in Aut(Q, +)$ și un element $c \in Q$, astfel încât $T-$forma sa este $T_7 = \left((Q, +), I\alpha\beta, \alpha, \beta, c\right)$, unde $\alpha c = \beta c = Ic$, $\alpha^2 = \beta^2 = \varepsilon, \alpha\beta = \beta\alpha,\ \alpha \neq \beta, \alpha \neq I, \beta \neq I$.*

Demonstrație. Fie (Q, A) un $T-$quasigrup ternar cu $T-$forma $T = ((Q, +), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, c)$ și fie $H = H_{21} = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, unde $H = \{\sigma \in S_4 \,|\, {}^{\sigma}A = A\}$. Din faptul că $(12)(34) \in K_4$, reiese că $A = {}^{(12)(34)}A$ ce este echivalentă cu egalitatea $A\left(x_2, x_1, A(x_1, x_2, x_3)\right) = x_3$. Aplicând forma operației de quasigrup, avem:

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c) + c = x_3. \qquad (2.48)$$

Substituind $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ în (2.48), obținem $\alpha_3 c + c = 0$. Considerând $x_1 = x_2 = 0$ în (2.48) și apoi $x_1 = x_3 = 0$, obținem:

$$\begin{cases} \alpha_3(\alpha_3 x_3) = x_3, \\ \alpha_1 x_2 + \alpha_3(\alpha_2 x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3^2 = \varepsilon, \\ \alpha_1 = I\alpha_2\alpha_3, \end{cases}$$

unde $\alpha, \beta \in Aut(Q, +), \beta(\alpha x) = (\alpha\beta)x$. Notând $\alpha_2 = \alpha$ și $\alpha_3 = \beta$, obținem $\beta^2 = \varepsilon, \beta c = Ic$, $\alpha_1 = I\alpha\beta$, prin urmare $T-$forma $T-$quasigrupului este $T = \left((Q, +), I\alpha\beta, \alpha, \beta, c\right)$.

Deoarece $(13)(24) \in K_4$, reiese că $A = {}^{(13)(24)}A$ ce implică egalitatea

$$A(x_3, A(x_1, x_2, x_3), x_1) = x_2.$$

Utilizând $T-$forma quasigrupului, obținem:

$$I\alpha\beta x_3 + \alpha(I\alpha\beta x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + c) + \beta x_1 + c = x_2. \qquad (2.49)$$

Luând în (2.49) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, primim $\alpha c = Ic$, iar luând $x_1 = x_2 = 0$ și $x_1 = x_3 = 0$, avem

$$\begin{cases} I\alpha\beta x_3 + \alpha(\beta x_3) = 0, \\ \alpha^2 x_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta = \beta\alpha, \\ \alpha^2 = \varepsilon. \end{cases}$$

Fiindcă, $(12), (13), (23) \notin K_4$, avem

$$\begin{cases} A \neq {}^{(12)}A, \\ A \neq {}^{(13)}A, \\ A \neq {}^{(23)}A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I\alpha\beta x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + c \neq I\alpha\beta x_2 + \alpha x_1 + \beta x_3 + c, \\ I\alpha\beta x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + c \neq I\alpha\beta x_3 + \alpha x_2 + \beta x_1 + c, \\ I\alpha\beta x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + c \neq I\alpha\beta x_1 + \alpha x_3 + \beta x_2 + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I\alpha\beta x_1 + \alpha x_2 \neq I\alpha\beta x_2 + \alpha x_1, \\ I\alpha\beta x_1 + \beta x_3 \neq I\alpha\beta x_3 + \beta x_1, \\ \alpha x_2 + \beta x_3 \neq \alpha x_3 + \beta x_2. \end{cases}$$

Luând în prima egalitate a sistemului $x_2 = 0$, avem $I\alpha\beta x_1 \neq \alpha x_1 \Leftrightarrow I\beta(\alpha x_1) \neq \alpha x_1 \Leftrightarrow \beta \neq I$, iar substituind în a doua și a treaia egalitate $x_3 = 0$, avem

$$\begin{cases} I\alpha\beta x_1 \neq \beta x_1, \\ \alpha x_2 \neq \beta x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta(I\alpha x_1) \neq \beta x_1, \\ \alpha \neq \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq I, \\ \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Deci, $T-$forma $T-$quasigrupului ternar cu $H = K_4$ este $T_7 = \big((Q, +), I\alpha\beta, \alpha, \beta, c\,\big)$, unde $\alpha c = \beta c = Ic$, $\alpha^2 = \beta^2 = \varepsilon, \alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha \neq \beta, \alpha \neq I, \beta \neq I.$□

Exemplul 2.3.4. $T-$Quasigrupul ternar $(\mathbb{Z}_7, A)$, $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{5}x_3$ are exact șase parastrofi distincți. Într-adevăr, în acest caz avem

$$\alpha \equiv 3\ (mod\ 8), \qquad \beta = 5\ (mod\ 8), \qquad I\alpha\beta \equiv 1\ (mod\ 8),$$
$$3^2 \equiv 1\ (mod\ 8), \qquad 5^2 \equiv 1\ (mod\ 8), \qquad \alpha 0 = \beta 0 \equiv 0\ (mod\ 8).$$

Determinând mulțimea parastrofilor (Anexa 5), obținem:

$$A = {}^{(12)(34)}A = {}^{(13)(24)}A = {}^{(14)(23)}A = x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{5}x_3,$$

$${}^{(12)}A = {}^{(34)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(1324)}A = \bar{3}x_1 + x_2 + \bar{5}x_3,$$

$${}^{(13)}A = {}^{(24)}A = {}^{(1432)}A = {}^{(1234)}A = \bar{5}x_1 + \bar{3}x_2 + x_3,$$

$${}^{(23)}A = {}^{(14)}A = {}^{(1342)}A = {}^{(1243)}A = x_1 + \bar{5}x_2 + \bar{3}x_3,$$

$${}^{(123)}A = {}^{(1422)}A = {}^{(134)}A = {}^{(243)}A = \bar{3}x_1 + \bar{5}x_2 + x_3,$$

$${}^{(132)}A = {}^{(124)}A = {}^{(143)}A = {}^{(234)}A = \bar{5}x_1 + x_2 + 3x_3.$$

În plus, toți cei șase parastrofi distincți reprezintă parastrofii principali ai quasigrupului. □

Corolarul 2.3.6. *Există quasigrupuri ternare finite de orice ordin impar* $q, (q, 3) = 1$ *ce posedă exact șase parastrofi distincți.*

2.4. Concluzii la Capitolul 2

În capitolul al doilea sunt prezentate rezultatele autoarei tezei, referitoare la T-quasigrupurile binare și, respectiv ternare, cu un număr exact dat de parastrofi distincți.

În paragraful 2.1 sunt date descrieri complete ale T-quasigrupurilor binare, numărul exact de parastrofi distincți ai cărora este 1, 2 sau 3. Sunt construite exemple de astfel de quasigrupuri și prezentate estimări ale spectrului lor. Se arată că: a) există TS-T-quasigrupuri binare de orice ordin $q \geq 1$; b) există T-quasigrupuri binare finite, care au exact doi parastrofi distincți, de orice ordin primar $q > 3$; c) există T-quasigrupuri binare finite, care au exact trei parastrofi distincți, de orice ordin $q > 2$.

Paragraful 2.2 este dedicat unei clase noi de quasigrupuri - quasigrupuri binare cu toți cei șase parastrofi distincți, numite DC −quasigrupuri. Sunt obținute următoarele rezultate:

a) Se demonstrează că:

- ✓ clasa DC −quasigrupurilor este închisă în raport cu transformarea de parastrofie;
- ✓ orice quasigrup netrivial ce este imagine omomorfică a unui DC − quasigrup este un DC −quasigrup;
- ✓ dacă quasigrup binar (Q, A) posedă un DC − subquasigrup, atunci (Q, A) este un DC −quasigrup;

b) Sunt caracterizate $DC - T$ −quasigrupurile și se demonstrează că, pentru orice $n \geq 5,\ n \neq 6$, există $DC - T$ −quasigrupuri de ordinul n.

În paragraful 2.3 sunt date condiții necesare și suficiente ca un T −quasigrup ternar să posede exact k parastrofi distincti, unde $k = 3, 4$ sau 6 (Propoziția 2.3.2, Teoremele 2.3.1-2.3.4). Sunt construite exemple și sunt date estimări ale spectrului lor. În particular, se arată că:

a) există quasigrupuri ternare finite, cu exact trei parastrofi distincți, de orice ordin $q \geq 3$;

b) există T −quasigrupuri ternare finite, ce au exact 4 parastrofi distincți, de orice ordin impar $q \geq 3$;

c) există T-quasigrupuri ternare finite de ordin impar $q, (q, 3) = 1,$ ce posedă exact șase parastrofi distincți.

3. T −QUASIGRUPURI 4-ARE CU UN NUMĂR MAXIMAL DAT DE PARASTROFI DISTINCȚI

Mulțimile de parastrofi distincți ai unui quasigrup $4-$ar sunt determinate de subgrupurile grupului S_5. Acest quasigrup are 120 de parastrofi, dintre care unii pot coincide ca operații. Deci, Numărul posibil de parastrofi distincți ai unui quasigrup $4-$ar (Q, A) coincide cu indicele subgrupului $H = \{\sigma \in S_3 | A = {}^{\sigma}A\}$ în grupul S_5, deci este divizor al numărului 120. Pentru a caracteriza operațiile 4-are de quasigrup cu un număr maximal dat de parastrofi distincți sunt utilizate cele 156 de subgrupuri ale grupului simetric S_5. Analizând mulțimea subgrupurilor grupului S_5, constatăm că acest grup nu are subgrupuri de ordinul 15, 30 sau 40, deci nu există quasigrupuri $4-$are cu numărul maximal de parastrofi distincți egal cu 8, 4 sau 3.

3.1. T −quasigrupupuri $4-$are total simetrice

Pentru ca un quasigrup $4-$ar să fie un $4-TS-$quasigrup (toți parastrofii acestui quasigrup coincid) este necesar și suficient ca subgrupul H ce caracterizează setul de parastrofi distincți ai acestui quasigrup să coincidă cu grupul S_5.

Propoziția 3.1.1. [60] *Grupul S_5 este generat de setul de transpoziții $(1i)$, $i = \overline{2,5}$:*

$$S_5 = \langle (12), (13), (14), (15) \rangle. \tag{3.1}$$

Demonstrație. Pentru comoditate vom nota elementele indicate (2.1.2) prin $(1i), (1j), (1k)$, $(1s)$, unde oricare două dintre elementele i, j, k, s sunt distincte. Pentru a arăta că elementele respective generează grupul S_5, este suficient de arătat că produsul unor transpoziții de forma dată generează toate elementele ciclice de ordinul 2, 3, 4 și 5, celelalte elemente ale grupului fiind produsul a două cicluri disjuncte.

Fie elementele sunt $(1i)$, $i = \overline{2,5}$. Atunci, $\varepsilon = (1i)^2$. Produsul a două transpoziții distincte reprezintă un element de ordinul 3 de $(1i)(1j) = (1ij)$, iar $(1ij)(1i) = (ij)$. Elementele ciclice de ordinul 4 pot fi determinate astfel, $(1ij)(1k) = (1ijk)$, iar $(1ijk)(1i) = (ijk)$. Pentru a obține elementele de ordinul 5 este necesar de a înmulți un element de ordinul 4 și o transpoziție și anume $(1ijk)(1s) = (1ijks)$, iar $(1ijks)(1i) = (ijks)$. Astfel, cele 4 transpoziții reprezintă un set de generatori ai grupului S_5. □

Propoziția 3.1.2. *Fie (Q, A) un $4-$quasigrup. Dacă quasigrupul (Q, A) satisface identitățile*

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_2, x_1, x_3, x_4), \tag{3.2}$$

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_3, x_2, x_1, x_4), \tag{3.3}$$

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_4, x_2, x_3, x_1), \tag{3.4}$$

$$A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_2, x_3, x_4) = x_1, \tag{3.5}$$

atunci quasigrupul (Q, A) *este un* $4 - TS$ *−quasigrup.*

Demonstrație. Într-adevăr, fie că 4 −quasigrupul (Q, A) satisface setul de identități (3.2 - 3.5). Atunci din (3.2), obținem $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^{(12)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, prin urmare $(12) \in H$. Din (3.3), obținem, $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^{(13)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Deci, $(13) \in H$.

Analog, din (3.4) și (3.5) obținem $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$ și $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^{(15)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce implică că $(14) \in H$ și $(15) \in H$. Prin urmare, $H = \langle (12), (13), (14), (15) \rangle$, iar în baza Propoziției 2.1.1, obținem $H = S_5$. Astfel, 4 −quasigrupul (Q, A) este $4 - TS$ −quasigrup.□

Propoziția 3.1.3. *Pentru ca un* $4 - T$ *−quasigrup (Q, A) să fie un* $4 - TS - T$ *−quasigrup, este necesar și suficient ca acesta să posede* T *−forma* $\big((Q, +), I, I, I, I, c\big)$, *unde* $Ix = -x$, $\forall x \in Q$.

Demonstrație. Necesitatea. Fie *(Q, A)* un $4 - T -$ quasigrup cu $T -$ forma $\big((Q, +),$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c\big)$ și fie că acest quasigrup satisface identitățile (3.2-3.5). Atunci, din (3.2), obținem

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c \Leftrightarrow$$
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1.$$

Luând în ultima egalitate $x_1 = 0$, unde 0 este elementul neutru al grupului abelian $(Q, +)$, obținem

$$\alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_2, \forall x_2 \in Q \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2. \tag{3.6}$$

Din (3.3), obținem

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_4 + c,$$
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_1.$$

Luând în ultima egalitate $x_1 = 0$, obținem

$$\alpha_3 x_3 = \alpha_1 x_3, \forall x_3 \in Q \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_3. \tag{3.7}$$

Din (3.4) obținem

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_1 + c,$$
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 + \alpha_4 x_1.$$

Luând în ultima egalitate $x_1 = 0$, obținem

$$\alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4, \forall x_4 \in Q \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_4. \tag{3.8}$$

În baza tranzitivității relației de egalitate, din (3.6 – 3.8) obținem:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

Notând $\alpha_1 = \alpha$, obținem că T −forma operației este $\big((Q, +), a, \alpha, \alpha, \alpha, c\big)$, iar operația este

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha\, x_4 + c. \tag{3.9}$$

Din (3.5) și (3.9), obținem:

$$\alpha(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha\, x_4 + c) + \alpha x_2 + \alpha\, x_3 + \alpha\, x_4 + c = x_1,$$
$$\alpha^2 x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha c + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c = x_1. \tag{3.10}$$

Luând în (3.10) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha c + c = 0$. Substituind ultima egalitate în (3.10), obținem

$$\alpha^2 x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 = x_1. \tag{3.11}$$

Considerînd în (3.11) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, obținem

$$\alpha^2 x_4 + \alpha x_4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 x_4 = \alpha I x_4, \forall x_4 \in Q.$$

Din ultima relație avem, $\alpha_4 = \alpha I \Leftrightarrow \alpha = I$. Subtituind în (3.9) obținem

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + Ix_4 + c.$$

Suficiența. Fie că $4 - T -$ quasigrupul (Q, A) are $T -$ forma $\big((Q, +), I, I, I, I, c\big)$. Atunci, deoarece $(Q, +)$ este grup abelian, obținem:

$$A(x_2, x_1, x_3, x_4) = Ix_2 + Ix_3 + Ix_3 + Ix_4 + c = Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + Ix_4 + c = A(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$A(x_3, x_2, x_1, x_4) = Ix_3 + Ix_2 + Ix_1 + Ix_4 + c = Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + Ix_4 + c = A(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$A(x_4, x_2, x_3, x_1) = Ix_4 + Ix_2 + Ix_3 + Ix_1 + c = Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + Ix_4 + c = A(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_2, x_3, x_4) = I(Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + Ix_4 + c) + Ix_2 + Ix_3 + Ix_4 + c.$$

Deoarece $I^2 = \varepsilon$, ultima egalitate ia forma:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + Ic + Ix_2 + Ix_3 + Ix_4 + c = x_1.$$

Deoarece toate relațiile prezentate în Propoziția 2.1.2 sunt satisfăcute, reiese că $4 - T -$quasigrupul (Q, A) cu $T -$forma $\big((Q, +), I, I, I, I, c\big)$ este $4 - TS - T -$quasigrup. □

Corolarul 3.1.1. *Există* $4 - TS - T$ *−quasigrupuri de orice ordin* $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$.

Într-adevăr, considerăm $4 - T -$ quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$, unde $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{n-1}x_1 + \overline{n-1}x_2 + \overline{n-1}x_3 + \overline{n-1}x_4$. Conform Propoziției 2.1.3, $4 - T -$quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$, este un $4 - TS - T -$quasigrup. Existența acestuia pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, este asigurată de faptul că $(\overline{n-1}, n) = 1$.□

3.2. Inexistența $4 - T$ −quasigrupurilor cu exact doi sau exact șase parastrofi distincți

Grupul S_5 are un singur subgrup de ordinul 60 și acesta este grupul altern A_5. Cei doi parastrofi distincți ai unui quasigrup 4 −ar (Q, A) cu $\{\sigma \in S_5 \mid {}^{\sigma}A = A\} = A_5$, sunt dați de seturi de reprezentanți ai claselor de resturi $\{A_5,\ A_5\tau \mid \tau \in S_5 \setminus A_5\}$.

Propoziția 3.2.1. *Nu există* $4 - T$ *−quasigrupuri cu exact doi parastrofi distincți.*

Demonstrație. Fie (Q,A) un $4-T$ −quasigrup cu T −forma $((Q,+),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,c)$, atunci operația $A(x_1,x_2,x_3,x_4)$ este dată de

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4+c. \tag{3.12}$$

Deoarece $(12)(34)\in A_5$, rezultă că

$$^{(12)(34)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=A(x_1,x_2,x_3,x_4)\Leftrightarrow A(x_2,x_1,x_4,x_3)=A(x_1,x_2,x_3,x_4),$$

$$\alpha_1x_2+\alpha_2x_1+\alpha_3x_4+\alpha_4x_3+c=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4+c,$$

$$\alpha_1x_2+\alpha_2x_1+\alpha_3x_4+\alpha_4x_3=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4\,. \tag{3.13}$$

Luând în (3.13) $x_1=x_2=x_3=0$, unde 0 este zeroul grupului $(Q,+)$, obținem $\alpha_3x_4=\alpha_4x_4$, pentru $\forall x_4\in Q$. Deci,

$$\alpha_3=\alpha_4. \tag{3.14}$$

Analog, pentru $x_1=x_3=x_4=0$, din (3.13) obținem $\alpha_1x_2=\alpha_2x_2, \forall x_2\in Q$. Prin urmare,

$$\alpha_1=\alpha_2. \tag{3.15}$$

Substituind (3.14) și (3.15) în (3.12), obținem

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_1x_1+\alpha_1x_2+\alpha_3x_3+\alpha_3x_4+c. \tag{3.16}$$

Însă, $(12)\neq A_5\Leftrightarrow A(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq {}^{(12)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)$, ceea ce este echivalentă cu $A(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq A(x_2,x_1,x_3,x_4)$. În baza a (3.16), ultima inegalitate are forma:

$$\alpha_1x_1+\alpha_1x_2+\alpha_3x_3+\alpha_3x_4+c\neq\alpha_1x_2+\alpha_1x_1+\alpha_3x_3+\alpha_3x_4+c,$$

$$\alpha_1x_1+\alpha_1x_2\neq\alpha_1x_2+\alpha_1x_1. \tag{3.17}$$

Deoarece grupul $(Q,+)$ este abelian, inegalitatea (3.17) ia forma $\alpha_1x_1+\alpha_1x_2\neq\alpha_1x_1+\alpha_1x_2$, ceea ce reprezintă o contradicție. Prin urmare $(12)\in H$, ceea ce implică $H\neq A_5$. □

Quasigrupurile $4-$are cu exact șase parastrofi distincți sunt caracterizate de subgrupurile de ordinul 20 ale grupului S_5. Acest grup are exact 6 astfel de subgrupuri și anume

$$H_1=\langle(12345),(2453)\rangle,\quad H_2=\langle(12435),(2453)\rangle,\quad H_3=\langle(12453),(2435)\rangle,$$

$$H_4=\langle(12543),(2534)\rangle,\quad H_5=\langle(12534),(2543)\rangle,\quad H_6=\langle(13524),(3542)\rangle.$$

Elementele acestor subgrupuri sunt prezentate în Anexa 2.

Propoziția 3.2.2. *Nu există* $4-T$ −*quasigrupuri cu exact șase parastrofi distincți.*

Demonstrație. Într-adevăr, fie $H=H_1$. Deoarece $(14)(23)\in H_1$, atunci $A(x_1,x_2,x_3,x_4)={}^{(14)(23)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)$, ceea ce implică relația $A(x_1,x_2,x_3,x_4)=A(x_4,x_3,x_2,x_1)$. Utilizând (3.12) în ultima egalitate, obținem:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4+c=\alpha_1x_4+\alpha_2x_3+\alpha_3x_2+\alpha_4x_1+c. \tag{3.18}$$

Luând în (3.18) $x_1=x_2=x_3=0$, obținem $\alpha_4x_4=\alpha_1x_4\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_4$, iar substituind $x_1=x_3=x_4=0$, avem $\alpha_2x_2=\alpha_3x_2\Leftrightarrow\alpha_2=\alpha_3$. În așa mod (3.12) ia forma:

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_2x_3+\alpha_1x_4+c. \tag{3.19}$$

Însă, $(14)\notin H_1$, atunci $A(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq {}^{(14)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)$, ceea ce implică inegalitatea $A(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq A(x_4,x_2,x_3,x_1)$. Din ultima inegalitate și relația (3.19), obținem

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_2x_3+\alpha_1x_4+c\neq\alpha_1x_4+\alpha_2x_2+\alpha_2x_3+\alpha_1x_1+c.$$

Deoarece grupul $(Q,+)$ este abelian, ultima inegalitate reprezintă o contradicție. Prin urmare, $\{\sigma\in S_5|\ A={}^{\sigma}A\}\neq H_1$.

Fie $H=H_2$. Deoarece $(13)(24)\in H_2$, reiese că $A(x_1,x_2,x_3,x_4)={}^{(13)(24)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)$, ceea ce este echivalentă cu $A(x_1,x_2,x_3,x_4)=A(x_3,x_4,x_1,x_2)$. Aplicând asupra ultimei egalități (3.12), obținem:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4+c=\alpha_1x_4+\alpha_2x_3+\alpha_3x_2+\alpha_4x_1+c. \tag{3.20}$$

Considerând în (3.20) $x_1=x_2=x_3=0$, obținem $\alpha_4x_4=\alpha_1x_4\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_4$, iar substituind $x_1=x_3=x_4=0$, avem $\alpha_2x_2=\alpha_3x_2\Leftrightarrow\alpha_2=\alpha_3$. Astfel, (3.12) ia forma

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_2x_3+\alpha_1x_4+c. \tag{3.21}$$

Însă, $(14)\notin H_2$, atunci $A(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq {}^{(14)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)$, ce este echivalentă cu inegalitatea $A(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq A(x_4,x_2,x_3,x_1)$. Din ultima inegalitate și relația (3.21) obținem

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_1x_4+c\neq\alpha_1x_4+\alpha_2x_2+\alpha_2x_3+\alpha_1x_1+c.$$

Din contradicția de mai sus, avem $\{\sigma\in S_5|\ {}^{\sigma}A=A\}\neq H_2$.

Fie $H=H_3$. Deoarece $(12)(34)\in H_2$, reiese că $A(x_1,x_2,x_3,x_4)={}^{(12)(34)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)$, ceea ce este echivalentă cu $A(x_1,x_2,x_3,x_4)=A(x_2,x_1,x_3,x_4)$. Substituind (3.12) în ultima egalitate, obținem:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4+c=\alpha_1x_2+\alpha_2x_1+\alpha_3x_4+\alpha_4x_3+c. \tag{3.22}$$

Considerând în (3.22) $x_1=x_2=x_3=0$, obținem $\alpha_4x_4=\alpha_3x_4\Leftrightarrow\alpha_3=\alpha_4$. Punând $x_1=x_3=x_4=0$, avem $\alpha_1x_2=\alpha_2x_2\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2$. Astfel, (3.12) ia forma

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_1x_1+\alpha_1x_2+\alpha_3x_3+\alpha_3x_4+c. \tag{3.23}$$

Însă, $(12)\notin H_3$, atunci $A(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq {}^{(12)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)$, ce este echivalentă cu inegalitatea $A(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq A(x_2,x_1,x_3,x_4)$. Din ultima inegalitate și relația (3.23) obținem

$$\alpha_1x_1+\alpha_1x_2+\alpha_3x_3+\alpha_3x_4+c\neq\alpha_1x_2+\alpha_1x_1+\alpha_3x_3+\alpha_3x_4+c.$$

Din contradicția de mai sus, obținem $\{\sigma\in S_5|\ {}^{\sigma}A=A\}\neq H_3$.

Fie $H=H_4$. Deoarece $(13)(24)\in H_4$, reiese că $A(x_1,x_2,x_3,x_4)={}^{(13)(24)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)$, ceea ce este echivalentă cu

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4)=A(x_3,x_4,x_1,x_2). \tag{3.24}$$

Substituind (3.12) în (3.24), obținem:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4+c=\alpha_1x_3+\alpha_2x_4+\alpha_3x_1+\alpha_4x_2+c.$$

Considerând în ultima egalitate $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, obținem $\alpha_4 x_4 = \alpha_2 x_4 \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_4$. Pentru $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_1 x_1 = \alpha_3 x_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_3$. Astfel, (3.12) ia forma

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_4 + c. \tag{3.25}$$

Însă, $(13) \notin H_4$, atunci $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq {}^{(13)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ce este echivalentă cu inegalitatea $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_3, x_2, x_1, x_4)$. Din ultima inegalitate și relația (3.25) obținem

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_4 + c \neq \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_4 + c,$$

ceea ce este o contradicție. Astfel, $\{\sigma \in S_5 |\ {}^{\sigma}A = A\} \neq H_4$.

Fie $H = H_5$. Deoarece $(14)(23) \in H_5$, reiese că $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^{(14)(23)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce este echivalentă cu $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_4, x_3, x_2, x_1)$. Substituind (3.12) în ultima egalitate, obținem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 + c.$$

Luând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, obținem $\alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_4$. Punând $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_2 x_2 = \alpha_3 x_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_3$. Prin urmare, (3.12) ia forma

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_1 x_4 + c. \tag{3.26}$$

Însă, $(14) \notin H_5$, atunci $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq {}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ce este echivalentă cu inegalitatea $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_4, x_2, x_3, x_1)$. Însă, ${}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_4, x_2, x_3, x_1)$. Aplicând în ultima egalitate relația (3.26), obținem: ${}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_1 x_1 + c$. Deoarece grupul $(Q, +)$ este abelian, ultima egalitate ia forma

$${}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_1 x_3 + c = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

ceea ce este o contradicție. Prin urmare, $\{\sigma \in S_5 |\ {}^{\sigma}A = A\} \neq H_5$.

Fie $H = H_6$. Deoarece $(14)(23) \in H_6$, reiese că $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^{(14)(23)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce este echivalentă cu (3.25) ce implică $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 + c$. Luând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, obținem $\alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_4$. Punând $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_2 x_2 = \alpha_3 x_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_3$. Prin urmare, (3.12) ia forma (3.26). Deoarece, $(14) \notin H_6$, atunci $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq {}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ce este echivalentă cu inegalitatea $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_4, x_2, x_3, x_1)$. Însă, ${}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_4, x_2, x_3, x_1)$. Aplicând în ultima egalitate relația (3.26), obținem: ${}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_1 x_1 + c$. Deoarece grupul $(Q, +)$ este abelian, ultima egalitate ia forma

$${}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_1 x_3 + c = A(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

ceea ce este o contradicție. Prin urmare, $\{\sigma \in S_5 |\ {}^{\sigma}A = A\} \neq H_6$. □

3.3. T −quasigrupuri 4 −are cu exact 5 parastrofi distincți

Quasigrupurile 4 −are cu exact cinci parastrofi distincți sunt caracterizate de subgrupurile de ordinul 24 ale grupului S_5. Grupul simetric S_5 are 5 subgrupuri de ordinul 24, ce sunt izomorfe cu grupul S_4, și acestea sunt:

$$H_1 = \langle(1234),(12)\rangle,\ H_2 = \langle(1235),(12)\rangle,\qquad H_3 = \langle(1245),(12)\rangle,$$
$$H_4 = \langle(1345),(13)\rangle,\ H_5 = \langle(2345),(23)\rangle.$$

Elementele acestor subgrupuri sunt date în Anexa 2.

Propoziția 3.3.1. *Un $4-T$ −quasigrup are exact cinci parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha \in Aut(Q,+)$ și un element $c \in Q$, astfel încât $T-$ forma sa este una dintre următoarele:* $T_1 = \big((Q,+),\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,c\big)$, $T_2 = (Q,+),I,I,I,\alpha,c)$, $T_3 = \big((Q,+),I,I,\alpha,I,c\big)$, $T_4 = \big((Q,+),I,\alpha,I,I,c\big)$, $T_5 = \big((Q,+),\alpha,I,I,I,c\big)$, *unde* $\alpha \neq I$, $Ix = -x$.

Demonstrație. Fie (Q,A) un $4-T$ −quasigrup cu T −forma $\big((Q,+),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,c\big)$ și fie că (Q,A) are exact cinci parastrofi distincți. Atunci $|H| = 24$, unde $H = \{\sigma \in S_5 | A = {}^{\sigma}A\}$.

Fie că $H = H_1$. Deoarece $(12) \in H_1$, avem ${}^{(12)}A = A$, ceea ce este echivalentă cu identitatea $A(x_1,x_2,x_3,x_4) = A(x_1,x_2,x_3,x_4)$, de unde obținem

$$\alpha_1x_2 + \alpha_2x_1 = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2, \tag{3.27}$$

pentru $\forall x_1,x_2 \in Q$. Luând în (3.27) $x_1 = 0$, obținem $\alpha_1 = \alpha_2$. Din $(13) \in H_1$, avem $\alpha_1 = \alpha_3$. Relația $(14) \in H_1$, implică $\alpha_1 = \alpha_4$. În baza tranzitivității, obținem $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$. Notând $\alpha_i = \alpha, i = \overline{1,4}$, obținem că 4-$T$-quasigrupul (Q,+) are T-forma $\big((Q,+),\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,c\big)$. Deoarece $(15) \notin H_1$, avem $A(x_1,x_2,x_3,x_4\,) \neq {}^{(15)}A\,(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Ultima inegalitate este echivalentă cu $A(A(x_1,x_2,x_3,x_4),x_2,x_3,x_4) \neq x_1$. Aplicând (3.27), obținem:

$$\alpha(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c) + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \neq\ x_1,$$
$$\alpha^2x_1 + \alpha^2x_2 + \alpha^2x_3 + \alpha^2x_4 + \alpha c + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \neq x_1.$$

Substituind în ultima inegalitate $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha c \neq Ic \Leftrightarrow \alpha \neq I.\$$ Astfel, $4-T$ −quasigrupul are exact cinci parastrofi distincți dacă T −forma $T_1 = \big((Q,+),\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ c\big)$, unde $\alpha \neq I$.

Fie $H = H_2$. Deoarece $(12) \in H_2$, obținem $\alpha_1 = \alpha_2$. Din $(13) \in H_2$, avem $\alpha_1 = \alpha_3$. În baza tranzitivității, obținem

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3. \tag{3.28}$$

Însă $(15) \in H_2$, prin urmare, $A(x_1,x_2,x_3,x_4) = {}^{(15)}A\,(x_1,x_2,x_3,x_4)$, ce este echivalentă cu $A(A(x_1,x_2,x_3,x_4),x_2,x_3,x_4) = x_1$. Utilizând (3.27) în ultima egalitate, obținem:

$$\alpha_1(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 + c) + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4\,x_4 + c = x_1.$$

Substituind în ultima egalitate (3.28), obținem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_1 x_2 + \alpha_1\, x_3 + \alpha_4 x_4 + c = x_1.$$

$$\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \alpha_1^2 x_3 + \alpha_4\alpha_1 x_4 + \alpha_1 c + \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = x\_1. \qquad (3.29)$$

Luând în (3.29) egalitate $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_1 c = Ic$. Înlocuind în (3.29), avem

$$\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \alpha_1^2 x_3 + \alpha_4\alpha_1 x_4 + \alpha_1\, x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 = x_1.$$

Considerând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ în (3.29), obținem $\alpha_4\alpha_1 x_4 + \alpha_4 x_4 = 0 \Leftrightarrow \alpha_4\alpha_1 x_4 = I\alpha_4 x_4, \forall x_4 \in Q$. Din ultima relație obținem:

$$\alpha_4\alpha_1 = I\alpha_4. \qquad (3.30)$$

Deoarece $I\alpha_4 = \alpha_4 I$, din (3.30) avem $\alpha_1 = I$. Notând $\alpha_4 = \alpha$, obținem forma operației:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + \alpha x_4 + c. \qquad (3.31)$$

Deoarece $(34) \notin H_2$, prin urmare, $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq {}^{(34)}A\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce implică $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_4, x_3)$. Deci, $Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + \alpha x_4 + c \neq Ix_1 + Ix_2 + Ix_4 + \alpha\, x_3 + c$. Din ultima inegalitate, obținem $Ix_3 + \alpha x_4 \neq Ix_4 + \alpha x_3$. Luând $x_3 = 0$, din ultima inegalitate obținem $\alpha \neq I$. Astfel, $4 - T$ −quasigrupul are T −forma $\big((Q, +), I, I, I, \alpha, c\big)$.

Fie $H = H_3$. Deoarece $(12) \in H_3$, obținem $\alpha_1 = \alpha_2$. Din $(14) \in H_3$, avem $\alpha_1 = \alpha_2$. În baza tranzitivității relației de egalitate, obținem:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4, \qquad (3.32)$$

iar operația $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c. \qquad (3.33)$$

$(15) \in H_3$, prin urmare, $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^{(15)}A\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ce este echivalentă cu $A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_2, x_3, x_4) = x_1$. Aplicând asupra ultimei egalități (2.3.7), obținem

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c) + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c = x_1$$

$$\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \alpha_1\alpha_3 x_3 + \alpha_1^2 x_4 + \alpha_1 c + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c = x_1 \qquad (3.34)$$

Substituind în (3.34) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_1 c = Ic$. Inlocuind în (3.34), obținem

$$\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \alpha_1\alpha_3 x_3 + \alpha_1^2 x_4 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 = x_1 \qquad (3.35)$$

Fie $x_1 = x_2 = x_4 = 0$. Din (3.35), avem $\alpha_1\alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_3 x_3 = \alpha_3 I x_3 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_3 = \alpha_3 I \Leftrightarrow \alpha_1 = I$. Notând $\alpha_3 = \alpha$, obținem forma operației (3.35) în (3.33), obținem:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ix_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + Ix_4 + c. \qquad (3.36)$$

$(34) \notin H_3$, prin urmare, $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq {}^{(34)}A\,(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_4, x_4)$. Aplicând în ultima inegalitate (3.36), obținem

$$Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + \alpha x_4 + c \neq Ix_1 + Ix_2 + Ix_4 + \alpha x_3 + c.$$

Luând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, din ultima inegalitate obținem $\alpha \neq I$. Astfel, $4 - T$ −quasigrupul are exact cinci parastrofi distincți dacă T −forma sa este $((Q, +), I, I, \alpha, I, c)$, unde $\alpha \neq I$.

Fie $H = H_4$. Deoarece $(13) \in H_4$, obținem $\alpha_1 = \alpha_3$. Din $(14) \in H_4$, avem $\alpha_1 = \alpha_4$. În baza tranzitivității relației de egalitate, obținem

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4, \tag{3.37}$$

iar operația $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_4 + c. \tag{3.38}$$

$(15) \in H_4$, prin urmare, $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^{(15)}A\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ce este echivalentă cu $A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_2, x_3, x_4) = x_1$. Substituind în ultima egalitate relația (3.38), obținem

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_4 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_4 + c = x_1. \tag{3.39}$$

Substituind în (3.39) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_1 c = Ic$. Înlocuind în (3.39), obținem

$$\alpha_1^2\, x_1 + \alpha_1\alpha_2 x_2 + \alpha_1^2 x_3 + \alpha_1^2\, x_4 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_4 = x_1. \tag{3.40}$$

Fie $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. Din (3.40), avem $\alpha_1\alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2 x_2 = \alpha_2 I x_2 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2 = \alpha_2 I \Leftrightarrow \alpha_1 = I$. Notând $\alpha_2 = \alpha$, obținem forma operației (3.38) în forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ix_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + Ix_4 + c. \tag{3.41}$$

$(12) \notin H_4$, prin urmare, $A(x_1, x_2, x_3, x_4), \neq {}^{(12)}A\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ce este echivalentă cu $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_2, x_1, x_3, x_4)$. Utilizând în ultima inegalitate (3.41), obținem:

$$Ix_1 + \alpha x_2 + Ix_4 + Ix_3 + c \neq Ix_2 + \alpha x_1 + Ix_3 + Ix_4 + c.$$

Luând $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, din ultima egalitate obținem $\alpha \neq I$. Astfel, $4 - T -$quasigrupul are exact cinci parastrofi distincți dacă $T -$forma sa este $((Q, +), I, \alpha, I, I, c)$, unde $\alpha \neq I$.

Fie că $H = H_5$. Deoarece $(23) \in H_5$, obținem $\alpha_2 = \alpha_3$. Din $(24) \in H_5$, avem $\alpha_2 = \alpha_4$. În baza tranzitivității relației de egalitate, obținem

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4, \tag{3.42}$$

iar operația $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_2 x_4 + c. \tag{3.43}$$

$(25) \in H_5$, prin urmare, $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^{(25)}A\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce este echivalentă cu $A(x_1, A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_3, x_4) = x_2$. Aplicând în ultima egalitate (3.43), obținem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_2 x_4 + c) + \alpha_2 x_3 + \alpha_2 x_4 + c = x_2$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2\alpha_1 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \alpha_2^2 x_3 + \alpha_2^2 x_4 + \alpha_2 c + \alpha_2 x_3 + \alpha_2 x_4 + c = x_2 \tag{3.44}$$

Substituind în ultima egalitate $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_2 c = Ic$. Înlocuind în (3.44), obținem

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2\alpha_1 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \alpha_2^2 x_3 + \alpha_2^2 x_4 + \alpha_2 x_3 + \alpha_2 x_4 = x_2 \tag{3.45}$$

Fie $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Din (3.45), avem $\alpha_1 x_1 + \alpha_2\alpha_1 x_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2\alpha_1 x_1 = \alpha_1 I x_2 \Leftrightarrow \alpha_2\alpha_1 = \alpha_1 I = I\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_2 = I$. Notând $\alpha_1 = \alpha$, obținem forma operației (3.43) în forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha x_1 + Ix_2 + Ix_3 + Ix_4 + c. \tag{3.46}$$

$(12) \notin H_5$, prin urmare, $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq {}^{(12)}A\,(x_1, x_2, x_3, x_4\,) \Leftrightarrow A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_2, x_1, x_3, x_4)$. Din ultima inegalitate, avem:

$$\alpha x_1 + Ix_2 + Ix_3 + Ix_4 + c \neq \alpha x_2 + Ix_1 + Ix_3 + Ix_4 + c.$$

Luând $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, din ultima egalitate obținem $\alpha \neq I$. Astfel, $4-T-$quasigrupul are exact cinci parastrofi distincți dacă $T-$forma sa este $((Q, +), \alpha, I, I, I, c)$, unde $\alpha \neq I$. □

Corolarul 3.3.1. *Dacă* $4-T-$*quasigrupul are* $T-$*forma* $T_1 = \big((Q, +), \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, c\big)$, *unde* $\alpha \neq I$, *atunci un set maximal de parastrofi distincți este* $A, {}^{(15)}A, {}^{(25)}A, {}^{(35)}A, {}^{(45)}A$.

Într-adevăr, dacă $4-T-$quasigrupul are $T-$forma dată, atunci mulțimea parastrofilor ce coincide coincide cu $H_1 = \langle (1234), (12) \rangle$. Toate elementele acestui subgroup sunt prezentate în Anexa 2. Mai mult ca atât, subgrupul $H_1 = S_4$. Însă,

$$S_5 = S_4 \cup (15)S_4 \cup (25)S_4 \cup (35)S_4 \cup (45)S_4.$$

Prin urmare, parastrofii distincți ai quasigrupului sunt $A, {}^{(15)}A, {}^{(25)}A, {}^{(35)}A, {}^{(45)}A$. În plus, utilizând forma parastrofilor $T-$quasigrupului $4-$ar prezentată în Anexa 5, obținem:

$$A(x_1^4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c,$$

$${}^{(15)}A(x_1^4) = \alpha^{-1}x_1 + Ix_2 + Ix_3 + Ix_4 + I\alpha^{-1}c,$$

$${}^{(25)}A(x_1^4) = Ix_1 + \alpha^{-1}x_2 + Ix_3 + Ix_4 + I\alpha^{-1}c,$$

$${}^{(35)}A(x_1^4) = Ix_1 + Ix_2 + \alpha^{-1}x_3 + Ix_4 + I\alpha^{-1}c,$$

$${}^{(45)}A(x_1^4) = Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + \alpha^{-1}x_4 + I\alpha^{-1}c.$$

Dacă $\alpha = I$, atunci $\alpha^{-1} = I$ și $I\alpha^{-1}c = c$, iar toți cei cinci parastrofi coincid. Astfel, pentru $\alpha \neq I$ toți cei cinci parastrofi sunt distincți. □

Corolarul 3.3.2. *Există* $4-T-$*quasigrupuri de ordinul q, cu exact 5 parastrofi distincți, pentru orice* $q \geq 3$.

Demonstrație. Considerăm $4-T-$quasigrupul (Q, A) cu $T-$forma $((\mathbb{Z}_n, +), \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0})$. Atunci, mulțimea parastrofilor distincți este:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$${}^{(15)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 - x_3 - x_4,$$

$${}^{(25)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + x_2 - x_3 - x_4,$$

$${}^{(35)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$$

$${}^{(45)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 - x_2 - x_3 + x_4.$$

Deoarece $1 \equiv -1\ (mod\ n)$ doar pentru $n = 2$, rezultă că pentru $\forall n \geq 3$, cei cinci parastrofi sunt distincți. □

Exemplul 3.3.1. $4-T-$quasigrupul $(\mathbb{Z}_5, A)$, $A(x_1^4) = \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{2}x_4 + \bar{3}$, are exact cinci parastrofi distincți. Deoarece $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \bar{2}$, în baza Corolarului 3.3.1 $4-T-$quasigrupul are exact cinci parastrofi distincți, iar relațiile de determinare a acestor parastrofi sunt prezentante în demonstrația corolarului respectiv.

$$\alpha \equiv 2\ (mod\ 5), \qquad \alpha^{-1} \equiv 3\ (mod\ 5), \qquad I \equiv 4\ (mod\ 5),$$

$$c \equiv 3\ (mod\ 5), \qquad I\alpha^{-1}c \equiv 1\ (mod\ 5).$$

$$A(x_1^4) = \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{2}x_4 + \bar{3},$$

$$^{(15)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{4}x_4 + \bar{1},$$

$$^{(25)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{4}x_4 + \bar{1},$$

$$^{(35)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{4}x_4 + \bar{1},$$

$$^{(45)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{3}x_4 + \bar{1}. \square$$

3.4. $T-$Quasigrupuri $4-$are cu exact zece parastrofi distincți

Fie (Q, A) un quasigrup $4-$ar și $H = \{\sigma \in S_5 |\ {}^{\sigma}A = A\}$, astfel încât $|H| = 12, H \leq S_5$. Grupul S_5 are 15 astfel de subgrupuri, dintre care 5 sunt izomorfe grupului altern A_4, iar 10 subgrupuri sunt izomorfe cu $S_2 \times S_3$. Elementele acestor subgrupuri sunt prezentate în Anexa 2.

Propoziția 3.4.1. *Nu există* $4-T-$*quasigrupuri* (Q, A) *cu 10 parastrofi distincți, unde* $H = \{\sigma \in S_5 |\ {}^{\sigma}A = A\} \cong A_4$.

Demonstrație. Subgrupurile lui S_5, izomorfe cu A_4, sunt:

$$H_1 = \langle(12)(34), (123)\rangle, \qquad H_2 = \langle(12)(35), (123)\rangle, \qquad H_3 = \langle(12)(45), (124)\rangle,$$

$$H_4 = \langle(13)(45), (134)\rangle,\ H_5 = \langle(23)(45), (234)\rangle.$$

Arătăm că $H_i \neq \{\sigma \in S_5 |\ {}^{\sigma}A = A\}$, pentru $\forall i = \overline{1,5}$. Deoarece $(12)(34) \in H_1$, obținem:

$$^{(12)(34)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow A(x_2, x_1, x_4, x_3) = A(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Din ultima egalitate și (3.12), avem:

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_4 + \alpha_4 x_3 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c$$

Luând în ultima egalitate $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, obținem $\alpha_3 x_4 = \alpha_4 x_4 \Leftrightarrow \alpha_3 = \alpha_4$. Substituind apoi $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_1 x_2 = \alpha_2 x_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$. Astfel (3.12) ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4 + c. \qquad (3.47)$$

Însă, $(12) \notin H_1$, prin urmare, $^{(12)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce este echivalentă cu identitatea $A(x_2, x_1, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Aplicând în ultima egalitate (3.47), obținem:

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4 + c,$$

ceea ce este o contradicție.

Fie $H = H_2$. Deoarece $(123) \in H_2$, reiese că ${}^{(123)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce este echivalentă cu identitatea $A(x_3, x_1, x_2, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Substituind în ultima egalitate relația (3.12), obținem:

$$\alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_4 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c,$$

$$\alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3. \tag{3.48}$$

Considerând în (3.48) $x_1 = x_2 = 0$, avem $\alpha_1 x_3 = \alpha_3 x_3$, $\forall x_3 \in Q$, ceea ce implică $\alpha_1 = \alpha_3$, iar pentru $x_2 = x_3 = 0$ în relația (3.48), obținem $\alpha_2 x_1 = \alpha_1 x_1 \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_1$. Din tranzitivitatea relației de egalitate, avem: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, ceea ce implică

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 + c. \tag{3.49}$$

Din condiția că $(12) \notin H_2$, obținem $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq {}^{(12)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce este echivalentă cu inegalitatea $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_2, x_1, x_3, x_4)$. Aplicând (3.49) în ultima inegalitate, avem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 + c \neq \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 + c.$$

Reieșind din faptul că $(Q, +)$ este grup abelian, ultima inegalitate este o contradicție.

Fie $H = H_3$. Deoarece $(124) \in H_3$, de unde ${}^{(124)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce implică identitatea $A(x_4, x_1, x_3, x_2) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Aplicând asupra ultimei egalități (3.12), obținem:

$$\alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_2 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c,$$

$$\alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_1 + \alpha_4 x_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3. \tag{3.50}$$

Luând în (3.50) $x_1 = x_2 = 0$, avem $\alpha_1 x_4 = \alpha_4 x_4$, $\forall x_4 \in Q$, ceea ce implică $\alpha_1 = \alpha_4$, iar pentru $x_2 = x_4 = 0$ în relația (3.50), obținem $\alpha_4 x_1 = \alpha_1 x_1 \Leftrightarrow \alpha_4 = \alpha_1$. Din tranzitivitatea relației de egalitate, avem: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{4.}$ Prin urmare,

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c. \tag{3.51}$$

Din condiția că $(12) \notin H_3$, obținem $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq {}^{(12)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce este echivalentă cu inegalitatea $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_2, x_1, x_3, x_4)$. Din (3.51) și ultima inegalitate, avem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c \neq \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c,$$

ceea ce este o contradicție, deoarece grupul $(Q, +)$ abelian. Prin urmare, $\{\alpha \in S_5 \mid {}^{\sigma}A = A\} \neq H_3$.

Fie $H = H_4$. Deoarece $(134) \in H_4$, reiese că ${}^{(134)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ce implică identitatea $A(x_4, x_2, x_1, x_3) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Substituind în ultima egalitate relația (3.12), obținem:

$$\alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_3 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c,$$

$$\alpha_1 x_4 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_3\, x_3 + \alpha_4\, x_4. \quad (3.52)$$

Luând în (3.52) $x_1 = x_3 = 0$, avem $\alpha_1 x_4 = \alpha_4 x_4$, $\forall x_4 \in Q$, ceea ce implică $\alpha_1 = \alpha_4$, iar punând $x_1 = x_4 = 0$ în (3.52), obținem $\alpha_4 x_3 = \alpha_3\, x_3 \Leftrightarrow \alpha_4 = \alpha_3$. Din tranzitivitatea relației de egalitate, avem: $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4$, ceea ce implică

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_4 + c. \quad (3.53)$$

Din condiția că $(13) \notin H_4$, obținem $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq {}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce implică inegalitatea $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_4, x_2, x_3, x_1)$. Aplicând (3.53) în ultima inegalitate, avem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_4 + c \neq \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_1 + c.$$

Reieșind din faptul că $(Q, +)$ este grup abelian, ultima inegalitate este o contradicție.

Fie $H = H_5$. $(234) \in H_5$, prin urmare, ${}^{(234)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, de unde avem $A(x_1, x_4, x_2, x_3) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Substituind în ultima egalitate relația (3.12), obținem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_3 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2\, x_2 + \alpha_3\, x_3 + \alpha_4\, x_4 + c,$$

$$\alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_3 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3\, x_3 + \alpha_4\, x_4. \quad (3.54)$$

Luând în (3.54) $x_2 = x_3 = 0$, avem $\alpha_2 x_4 = \alpha_4 x_4 \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_4$, iar pentru $x_2 = x_4 = 0$ în relația (3.54), obținem $\alpha_4 x_3 = \alpha_3\, x_3 \Leftrightarrow \alpha_4 = \alpha_3$. Din tranzitivitatea relației de egalitate, avem: $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$, ceea ce implică

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_2 x_4 + c. \quad (3.55)$$

$(23) \notin H_5$ prin urmare, $A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq {}^{(23)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_3, x_2, x_4)$. Din în ultima inegalitate și (3.55), avem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_2 x_4 + c \neq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_4 + c,$$

ceea ce este o contradicție. □

Propoziția 3.4.2. *Fie (Q, A) un* $4 - T$ *−quasigrup cu* T *−grupul (Q, +) și fie* $H \in \{H_i, i = \overline{6, 15}\}$, *unde* $H = \{\sigma \in S_5 \mid {}^{\sigma}A = A\} \cong S_2 \times S_3$. *Atunci există* $\alpha \in Aut(Q, +)$ *și un element* $c \in Q$, *unde* $\alpha \neq I, Ix = -x, \forall x \in Q$, *0 este elementul neutru al grupului* $(Q, +)$, *astfel încât (Q, A) are una dintre următoarele* T *−forme:*

$$T_1 = ((Q, +), \alpha, \alpha, \alpha, I, c), \qquad T_2 = ((Q, +), \alpha, \alpha, I, \alpha, c),$$

$$T_3 = \big((Q, +), \alpha, I, \alpha, \alpha, c\big), \qquad T_4 = ((Q, +), I, \alpha, \alpha, \alpha, c),$$

$$T_5 = ((Q, +), I, I, \alpha, \alpha, c), \qquad T_6 = ((Q, +), I, \alpha, I, \alpha, c),$$

$$T_7 = ((Q, +), I, \alpha, \alpha, I, c), \qquad T_8 = ((Q, +), \alpha, I, I, \alpha, c),$$

$$T_9 = ((Q, +), \alpha, I, \alpha, I, c), \qquad T_{10} = ((Q, +), \alpha, \alpha, I, I, c).$$

Demonstrație. Fie $H = H_6 = \langle(123),(12),(45)\rangle$. Din $(123) \in H_6$, rezultă că

$$^{(123)}A(x_1,x_2,x_3,x_4) = A(x_1,x_2,x_3,x_4) \Leftrightarrow A(x_3,x_1,x_2,x_4) = A(x_1,x_2,x_3,x_4).$$

Aplicând relația (3.12), din ultima egalitate obținem:

$$\alpha_1x_3 + \alpha_2x_1 + \alpha_3x_2 + \alpha_4x_4 + c = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 + c.$$

$$\alpha_1x_3 + \alpha_2x_1 + \alpha_3x_2 = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 \tag{3.56}$$

Luând în (3.56) $x_1 = x_2 = 0$, avem $\alpha_1x_3 = \alpha_3x_3, \forall x_3 \in Q$, ceea ce implică $\alpha_1 = \alpha_3$, iar substituind $x_1 = x_3 = 0$, obținem $\alpha_3 = \alpha_2$. Notând $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, din (3.12), avem:

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha_4x_4 + c \tag{3.57}$$

Din $(45) \in H_6$ reiese că $^{(45)}A(x_1,x_2,x_3,x_4) = A(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ce este echivalentă cu $A\big(x_1,x_2,x_3,A(x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = x_4$. Din ultima egalitate și (3.57), obținem:

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha_4(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha_4x_4 + c) + c = x_4. \tag{3.58}$$

Considerând în (3.58) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_4c + c = 0$. Substituind în (3.58), aceasta ia forma:

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha_4(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha_4x_4) = x_4 \tag{3.59}$$

Punând în (3.59) $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, primim $\alpha x_3 + \alpha_4(\alpha x_3) = 0 \Leftrightarrow \alpha_4(\alpha x_3) = I(\alpha x_3)$. De unde obținem $\alpha_4 = I$, iar (3.57) ia forma:

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + Ix_4 + c \tag{3.60}$$

$(14) \notin H_6$, ceea ce implică că $^{(14)}A(x_1,x_2,x_3,x_4) \neq A(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Ultima inegalitate este echivalentă cu $A(x_4,x_2,x_3,x_1) \neq A(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Din această inegalitate și (3.60), obținem:

$$\alpha x_4 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + Ix_1 + c \neq \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + Ix_4 + c \tag{3.61}$$

Luând în (3.61) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, avem $\alpha x_4 \neq Ix_4, \forall x_4 \in Q$. Prin urmare, $\alpha \neq I$, iar $T -$forma acestui $4 - T -$quasigrup este $T_1 = \big((Q,+),\alpha,\alpha,\alpha,I,c\big)$.

Fie $H = H_7 = \langle(124),(12),(35)\rangle$. Din $(124) \in H_7$, reiese că

$$^{(124)}A(x_1,x_2,x_3,x_4) = A(x_1,x_2,x_3,x_4) \Leftrightarrow A(x_4,x_1,x_3,x_2) = A(x_1,x_2,x_3,x_4).$$

În baza (3.12) și ultima egalitate, avem:

$$\alpha_1x_4 + \alpha_2x_1 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_2 + c = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 + c.$$

$$\alpha_1x_4 + \alpha_2x_1 + \alpha_4x_2 = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_4x_4 \tag{3.62}$$

Luând în (3.62) $x_1 = x_2 = 0$, obținem $\alpha_1x_4 = \alpha_4x_4, \forall x_4 \in Q \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_4$, iar substituind $x_1 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_4 = \alpha_2$. Notând $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha$, din (3.12), avem:

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha x_4 + c \tag{3.63}$$

Din $(35) \in H_7 \Rightarrow {}^{(35)}A(x_1,x_2,x_3,x_4) = A(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Această egalitate este echivalentă cu $A(x_1,x_2,A(x_1,x_2,x_3,x_4),x_4) = x_3$. Din ultima egalitate și (3.63), obținem:

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha_3(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha x_4 + c) + \alpha x_4 + c = x_3. \quad (3.64)$$

Considerând în (3.64) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_3 c + c = 0$. Substituind în (3.64), aceasta ia forma:

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha_3(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha x_4) = x_3 \quad (3.65)$$

Punând în (3.65) $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ obținem $\alpha x_2 + \alpha_3(\alpha x_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha_3(\alpha x_2) = I(\alpha x_2)$. Deoarece $\alpha_3 \in Aut(Q, +)$, reise că $\alpha_3 = I$, iar (3.63) ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + I x_3 + \alpha x_4 + c \quad (3.66)$$

$(13) \notin H_7$, ceea ce implică că ${}^{(13)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Ultima inegalitate este echivalentă cu $A(x_3, x_2, x_1, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din această inegalitate și (3.66), obținem:

$$\alpha x_3 + \alpha x_2 + I x_1 + \alpha x_4 + c \neq \alpha x_1 + \alpha x_2 + I x_3 + \alpha x_4 + c \quad (3.67)$$

Luând în (3.67) $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, avem $\alpha x_3 \neq I x_3, \forall x_3 \in Q$. Prin urmare, $\alpha \neq I$, iar $T-$forma acestui $4-T-$quasigrup este $T_2 = \big((Q, +), \alpha, \alpha, I, \alpha, c\big)$.

Fie $H = H_8 = \langle (134), (13), (25) \rangle$.Deoarece $(134) \in H_7$, obținem

$${}^{(134)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Din definiția parastrofului respectiv, avem $A(x_4, x_2, x_1, x_3) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Aplicând (3.12) în ultima egalitate, avem:

$$\alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_3 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c.$$

$$\alpha_1 x_4 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \quad (3.68)$$

Luând în (3.68) $x_1 = x_3 = 0$, obținem $\alpha_1 x_4 = \alpha_4 x_4, \forall x_4 \in Q \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_4$. Înlocuind în (3.68) $x_1 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_4 = \alpha_3$. Notând $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$, din (3.12), avem:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \quad (3.69)$$

$(25) \in H_8 \Rightarrow {}^{(25)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow A(x_1, A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_3, x_4) = x_2$.

Din ultima egalitate și (3.69), obținem:

$$\alpha x_1 + \alpha_2(\alpha x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c) + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c = x_2. \quad (3.70)$$

Considerând în (3.70) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_2 c + c = 0$. Substituind în (3.70), avem:

$$\alpha x_1 + \alpha_2(\alpha x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4) + \alpha x_3 + \alpha x_4 = x_2 \quad (3.71)$$

Punând în (3.71) $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, primim $\alpha_2(\alpha x_3) + \alpha x_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = I$, iar (3.69) ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha x_1 + I x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \quad (3.72)$$

$(12) \notin H_8 \Leftrightarrow {}^{(12)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din această inegalitate, obținem $A(x_2, x_1, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din ultima inegalitate și (3.72), avem:

$$\alpha x_2 + I x_1 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \neq \alpha x_1 + I x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \quad (3.73)$$

Luând în (3.73) $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha x_2 \neq I x_2, \forall x_2 \in Q$. Prin urmare, $\alpha \neq I$, iar T −forma acestui $4 - T$ −quasigrup este $T_3 = \big((Q,+), \alpha, I, \alpha, \alpha, c\big)$.

Fie $H = H_9 = \langle (234), (23), (15) \rangle$. Deoarece $(234) \in H_8$, avem

$$^{(234)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow A(x_1, x_3, x_4, x_2) = A(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Utilizând în ultima egalitate (3.12), avem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_4 + \alpha_4 x_2 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c.$$

$$\alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_4 + \alpha_4 x_2 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \qquad (3.74)$$

Considerând în (3.74) $x_2 = x_3 = 0$, obținem $\alpha_3 x_4 = \alpha_4 x_4, \forall x_4 \in Q \Leftrightarrow \alpha_3 = \alpha_4$, înlocuind $x_2 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_2 = \alpha_3$. Notând $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$, din (3.12), avem:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \qquad (3.75)$$

$$(15) \in H_9 \Rightarrow {}^{(15)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_2, x_3, x_4) = x_1.$$

Din ultima egalitate și (3.75), obținem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c) + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c = x_1. \qquad (3.76)$$

Punând în (3.75) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_1 c + c = 0$. Substituind în (3.76), avem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4) + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 = x_1 \qquad (3.77)$$

Luând în (3.77) $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, primim $\alpha_1(\alpha x_3) + \alpha x_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = I$, iar (3.77) are forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = I x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \qquad (3.78)$$

$(12) \notin H_9 \Leftrightarrow {}^{(12)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din această inegalitate, obținem $A(x_2, x_1, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din ultima inegalitate și (3.78), avem:

$$I x_2 + \alpha x_1 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \neq I x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \qquad (3.79)$$

Luând în (3.79) $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, avem $I x_2 \neq \alpha x_2, \forall x_2 \in Q$. Prin urmare, $\alpha \neq I$, iar T −forma acestui $4 - T$ −quasigrup este $T_4 = \big((Q,+), I, \alpha, \alpha, \alpha, c\big)$.

Fie $H = H_{10} = \langle (125), (12), (34) \rangle$. Deoarece $(12) \in H_{10}$, obținem

$$^{(12)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow A(x_2, x_1, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (3.80)$$

Substituind relația (3.12) în (3.79), avem:

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c.$$

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \qquad (3.81)$$

Luând în (3.81) $x_2 = 0$, obținem $\alpha_2 x_1 = \alpha_1 x_1, \forall x_1 \in Q \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_1$. Analog, din condiția că $(34) \in H_{10}$, obținem $\alpha_3 = \alpha_4$. Astfel, relația (3.12) ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4 + c \qquad (3.82)$$

Din condiția $(125) \in H_{10}$, avem $A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_1, x_3, x_4) = x_2$. Utilizând în ultima egalitate relația (3.82), obținem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4 + c) + \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4 + c = x_2 \quad (3.83)$$

Considerând în (3.83) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_1 c + c = 0$. Substituind în (3.83), avem

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4) + \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4 = x_2 \quad (3.84)$$

Din (3.84), pentru $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, avem

$$\alpha_1(\alpha_3 x_3) + \alpha_3 x_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_3 x_3) = I(\alpha_3 x_3).$$

Prin urmare, $\alpha_1 = I$. Notând $\alpha_3 = \alpha$, relația (3.82) ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ix_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \quad (3.85)$$

$(35) \notin H_{10} \Leftrightarrow {}^{(35)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din această inegalitate, obținem $A(x_1, x_2, A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_4) \neq x_3$. Din ultima inegalitate și (3.85), avem:

$$Ix_1 + Ix_2 + \alpha(Ix_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c) + \alpha x_4 + c \neq x_3 \quad (3.86)$$

Luând în (3.86) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, avem $\alpha^2 x_4 + \alpha x_4 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha x_4) \neq I(\alpha x_4)$. Prin urmare, $\alpha \neq I$, iar T −forma acestui $4 - T$ −quasigrup este $T_5 = \big((Q,+), I, I, \alpha, \alpha, c\big)$.

Fie $H = H_{11} = \langle(135), (13), (24)\rangle$. Deoarece $(13) \in H_{11}$, obținem

$$^{(13)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow A(x_3, x_2, x_1, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (3.87)$$

Substituind în (3.87) relația (3.12), avem:

$$\alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_4 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c.$$

$$\alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 \quad (3.88)$$

Luând $x_3 = 0$ în (3.88), obținem $\alpha_3 x_1 = \alpha_1 x_1, \forall x_1 \in Q \Leftrightarrow \alpha_3 = \alpha_1$. Analog, din condiția $(24) \in H_{11}$, obținem $\alpha_2 = \alpha_4$. În așa mod, relația (3.12), ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_4 + c \quad (3.89)$$

Din condiția $(135) \in H_{11}$, avem $A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_2, x_1, x_4) = x_3$. Utilizând în ultima egalitate relația (3.89), avem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_4 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha_2 x_4 + c = x_3 \quad (3.90)$$

Considerând în (3.90) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_1 c + c = 0$. Substituind în (3.90), avem

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_4) + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha_2 x_4 = x_3 \quad (3.91)$$

Din (3.91), pentru $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_1(\alpha_2 x_2) + \alpha_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_2 x_2) = I(\alpha_2 x_2)$. Prin urmare, $\alpha_1 = I$. Notând $\alpha_2 = \alpha$, relația (3.89) ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ix_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + \alpha x_4 + c \quad (3.92)$$

$(25) \notin H_{11} \Leftrightarrow {}^{(25)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din această inegalitate, obținem $A(x_1, A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_3, x_4) \neq x_2$. Din ultima inegalitate și (3.92), avem:

$$Ix_1 + \alpha(Ix_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + \alpha x_4 + c) + Ix_3 + \alpha x_4 + c \neq x_2 \quad (3.93)$$

Luând în (3.93) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, avem $\alpha^2 x_4 + \alpha x_4 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha x_4) \neq I(\alpha x_4)$.
Prin urmare, $\alpha \neq I$, iar T −forma acestui $4 - T$ −quasigrup este $T_6 = \big((Q,+), I, \alpha, I,\ \alpha, c\big)$.

Fie $H = H_{12} = \langle (145), (14), (23)\rangle$. Fiindcă $(14) \in H_{12}$, obținem

$$^{(14)}A(x_1,x_2,x_3,x_4) = A(x_1,x_2,x_3,x_4) \Leftrightarrow A(x_4,x_2,x_3,x_1) = A(x_1,x_2,x_3,x_4) \quad (3.94)$$

Din (3.94) și (3.12), avem:

$$\alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_1 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c.$$

$$\alpha_1 x_4 + \alpha_4 x_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_4 x_4 \quad (3.95)$$

Luând în (3.95) $x_4 = 0$, obținem $\alpha_4 x_1 = \alpha_1 x_1, \forall x_1 \in Q \Leftrightarrow \alpha_4 = \alpha_1$.
Analog, din condiția $(23) \in H_{12}$, obținem $\alpha_2 = \alpha_3$. Astfel, relația (3.12), ia forma:

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_1 x_4 + c \quad (3.96)$$

Din condiția $(145) \in H_{12}$, avem $A(A(x_1,x_2,x_3,x_4), x_2, x_3, x_1) = x_4$.
Utilizând în ultima egalitate relația (3.96), primim:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2\, x_3 + \alpha_3 x_4 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_1 x_1 + c = x_4 \quad (3.97)$$

Punând în (3.97) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_1 c + c = 0$.
Substituind în (3.97), avem

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2\, x_3 + \alpha_3 x_4) + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_1 x_1 = x_4 \quad (3.98)$$

Din (3.98), pentru $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, avem

$$\alpha_1(\alpha_2 x_2) + \alpha_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_2 x_2) = I(\alpha_2 x_2).$$

Prin urmare, $\alpha_1 = I$. Notând $\alpha_2 = \alpha$, relația (3.89) ia forma:

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4) = Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + Ix_4 + c \quad (3.99)$$

$(25) \notin H_{12} \Leftrightarrow {}^{(25)}A(x_1,x_2,x_3,x_4) \neq A(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Din această inegalitate, obținem $A(x_1, A(x_1,x_2,x_3,x_4), x_3, x_4) \neq x_2$. Din ultima inegalitate și (3.99), avem:

$$Ix_1 + \alpha(Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + Ix_4 + c) + \alpha x_3 + Ix_4 + c \neq x_2 \quad (3.100)$$

Luând în (3.100) $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, avem $\alpha^2 x_3 + \alpha x_3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha x_3) \neq I(\alpha x_3)$.
Prin urmare, $\alpha \neq I$, iar T −forma acestui $4 - T$ −quasigrup este $T_7 = \big((Q,+), I, \alpha, \alpha, I, c\big)$.

Fie $H = H_{13} = \langle (235), (14), (23)\rangle$. Deoarece $(14), (23) \in H_{13}$ și cazul precedent, obținem $\alpha_1 = \alpha_4$ și $\alpha_2 = \alpha_3$, iar operația de quasigrup are forma (3.96). Din faptul că $(235) \in H_{13}$, avem $A(x_1, A(x_1,x_2,x_3,x_4), x_2, x_4) = x_3$. Din ultima egalitate și (3.96), avem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2\, x_3 + \alpha_1 x_4 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_4 + c = x_3 \quad (3.101)$$

Considerând în (3.101) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_2 c + c = 0$. Substituind în (3.101), avem

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2\, x_3 + \alpha_1 x_4) + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_4 = x_3 \quad (3.102)$$

Din (3.102), pentru $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_2(\alpha_2 x_2) + \alpha_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2(\alpha_2 x_2) = I(\alpha_2 x_2)$.

Prin urmare, $\alpha_2 = I.$ Notând $\alpha_1 = \alpha,$ relația (3.96) ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha x_1 + I x_2 + I x_3 + \alpha x_4 + c \qquad (3.103)$$

$(12) \notin H_{13} \Leftrightarrow {}^{(12)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4).$ Din această inegalitate, obținem $A(x_2, x_1, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4).$ Din ultima inegalitate și (3.103), avem:

$$\alpha x_2 + I x_1 + I x_3 + \alpha x_4 + c \neq \alpha x_1 + I x_2 + I x_3 + \alpha x_4 + c$$

$$\alpha x_2 + I x_1 \neq \alpha x_1 + I x_2 \qquad (3.104)$$

Luând în (3.104) $x_1 = 0,$ avem $\alpha \neq I,$ iar $T-$forma acestui $4-T-$quasigrup este $T_8 = \big((Q,+), \alpha, I, I,\ \alpha, c\big).$

Fie $H = H_{14} = \langle (245), (13), (24) \rangle.$ Fiindcă $(13), (24) \in H_{12},$ analog cazului 6) obținem $\alpha_1 = \alpha_3$ și $\alpha_2 = \alpha_4,$ iar operația (3.12), ia forma (3.92). Din condiția $(245) \in H_{14},$ avem $A(x_1, A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_3, x_2) = x_4.$ Luând în ultima egalitate relația (3.92), avem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1\, x_3 + \alpha_2 x_4 + c) + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + c = x_4 \qquad (3.105)$$

Punând în (3.105) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,$ obținem $\alpha_2 c + c = 0.$ Substituind în (3.105), avem

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1\, x_3 + \alpha_2 x_4) + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 = x_4 \qquad (3.106)$$

Din (3.106), pentru $x_1 = x_2 = x_4 = 0,$ avem $\alpha_2(\alpha_1 x_3) + \alpha_1 x_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2(\alpha_1 x_3) = I(\alpha_1 x_3).$ Prin urmare, $\alpha_2 = I.$ Notând $\alpha_1 = \alpha,$ relația (3.92) ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha x_1 + I x_2 + \alpha x_3 + I x_4 + c \qquad (3.107)$$

$(12) \notin H_{14} \Leftrightarrow {}^{(12}A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow A(x_2, x_1, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4).$ Din (3.107), obținem $\alpha x_2 + I x_1 + \alpha x_3 + I x_4 + c \neq \alpha x_1 + I x_2 + \alpha x_3 + I x_4 + c,$ ce este echivalentă cu

$$\alpha x_2 + I x_1 \neq \alpha x_1 + I x_2 \qquad (3.108)$$

Punând în (3.108) $x_1 = 0,$ avem $\alpha \neq I,$ iar $T-$forma acestui $4-T-$quasigrup este $T_9 = \big((Q,+), \alpha, I, \alpha, I, c\big).$

Fie $H = H_{15} = \langle (345), (34), (12) \rangle.$ Din condiția că $(34), (12) \in H_{15},$ analog cazului 5) avem $\alpha_1 = \alpha_2$ și $\alpha_3 = \alpha_4,$ iar operația (3.12), primește forma (3.82). Din faptul că $(345) \in H_{15},$ avem $A(x_1, x_2, A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_3) = x_4.$ Utilizând în ultima egalitate relația (3.82), obținem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3\, x_3 + \alpha_3 x_4 + c) + \alpha_3 x_3 + c = x_4 \qquad (3.109)$$

Punând în (3.109) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,$ obținem $\alpha_3 c + c = 0.$ Substituind în (3.109), avem

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3\, x_3 + \alpha_3 x_4) + \alpha_3 x_3 = x_4 \qquad (3.110)$$

Din (3.110), pentru $x_1 = x_3 = x_4 = 0,$ avem $\alpha_1 x_2 + \alpha_3(\alpha_1 x_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha_3(\alpha_1 x_2) = I(\alpha_1 x_2).$ Prin urmare, $\alpha_3 = I.$ Notând $\alpha_1 = \alpha,$ relația (3.82) ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + I x_3 + I x_4 + c \qquad (3.111)$$

$(13) \notin H_{15} \Leftrightarrow {}^{(13)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow A(x_3, x_2, x_1, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Din (3.111) și ultima inegalitate, obținem

$$\alpha x_3 + \alpha x_2 + Ix_1 + Ix_4 + c \neq \alpha x_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + Ix_4 + c,$$

$$\alpha x_3 + Ix_1 \neq \alpha x_1 + Ix_3 \tag{3.112}$$

Luând în (3.112) $x_1 = 0$, avem $\alpha \neq I$, iar $T-$forma acestui $4-T-$quasigrup este $T_{10} = \big((Q,+), \alpha, \alpha, I, I, c\big)$. □

Propoziția 3.4.3. *Quasigrupul* $4-ar$ (Q, A) *cu subgrupul* $H = \{\sigma \in S_5 | A = {}^{\sigma}A\} = H_6 = \langle(123), (12), (45)\rangle$, *are parastrofii* A, ${}^{(14)}A$, ${}^{(15)}A$, ${}^{(24)}A$, ${}^{(25)}A$, ${}^{(34)}A$, ${}^{(34)}A$, ${}^{(14)(25)}A$, ${}^{(14)(35)}A$, ${}^{(24)(35)}A$ *distincți doi cate doi.*

Demonstrație. Fie (Q, A) un $4-$quasigrup cu subgrupul parastrofilor egali $H = H_6$. După cum este arătat în Anexa 2 acest subgrup are elementele

$$H_6 = \{\varepsilon, (123), (12), (45), (132), (13), (23), (123)(45),$$
$$(132)(45), (12)(45), (13)(45), (23)(45)\}$$

Atunci grupul S_5 poate fi descompus în zece clase disjuncte și anume:

$$H_6,\ (14)H_6,\ (15)H_6, (24)H_6,\ (25)H_6, (34)H_6, (35)H_6,\ (14)(25)H_6,\ (14)(35)H_6,$$
$$(24)(35)H_6,$$

ceea ce arată că toți cei zece parastrofi indicați aparțin diferitor clase de rest ce sunt disjuncte. Deci, cei zece parastrofi sunt distincți. □

Corolarul 3.4.1. *Dacă* $4-T-$*quasigrupul* (Q, A) *are* $T-$*forma* $T = \big((Q,+), \alpha, \alpha, \alpha, I, c\big)$, *unde* $\alpha \neq I$, *atunci parastrofii distincți ai acestui quasigrup sunt:*

$$A(x_1^4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + Ix_4 + c,$$
$${}^{(14)}A(x_1^4) = Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c,$$
$${}^{(24)}A(x_1^4) = \alpha x_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c,$$
$${}^{(34)}A(x_1^4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + \alpha x_4 + c,$$
$${}^{(15)}A(x_1^4) = \alpha^{-1}x_1 + Ix_2 + Ix_3 + \alpha^{-1}x_4 + I\alpha^{-1}c,$$
$${}^{(25)}A(x_1^4) = Ix_1 + \alpha^{-1}x_2 + Ix_3 + \alpha^{-1}x_4 + I\alpha^{-1}c,$$
$${}^{(35)}A(x_1^4) = Ix_1 + Ix_2 + \alpha^{-1}x_3 + \alpha^{-1}x_4 + I\alpha^{-1}c,$$
$${}^{(14)(35)}A(x_1^4) = \alpha^{-1}x_1 + Ix_2 + \alpha^{-1}x_3 + Ix_4 + I\alpha^{-1}c,$$
$${}^{(14)(25)}A(x_1^4) = \alpha^{-1}x_1 + \alpha^{-1}x_2 + Ix_3 + Ix_4 + I\alpha^{-1}c,$$
$${}^{(24)(35)}A(x_1^4) = Ix_1 + \alpha^{-1}x_2 + \alpha^{-1}x_3 + Ix_4 + I\alpha^{-1}c.$$

Într-adevăr, dacă $4-T-$ quasigrupul (Q,A) are $T-$ forma indicată, atunci subgrupul parastrofilor egali coincide cu subgrupul H_6. Conform Propoziției 3.4.3, parastrofii distincți ai quasigrupului coincide cu parastrofii din enunțul Corolarului. Pentru a stabili forma parastrofilor este suficient de aplicat relațiile prezentate în Anexa 5, ținând cont de faptul că $I\alpha = \alpha I$. □

Corolarul 3.4.2. *Pentru orice ordin impar q, $q \geq 3$ există $4-T-$quasigrupuri cu exact 10 parastrofi distincți.*

Demonstrație. Considerăm $T-$quasigrupul $4-$ar $(\mathbb{Z}_n, A)$, $A(x_1^4) = x_1 + x_2 + x_3 + \overline{n-1}x_4$.

Conform Propoziției 3.4.3, $4-T-$quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$ are exact zece parastrofi distincți, dacă și numai dacă $\overline{n-1} \not\equiv \overline{1}\ (mod\ n)$. Prin urmare, $\bar{n} \not\equiv 2\ (mod\ n)$. Deci, $4-T-$quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$ are exact zece parastrofi distincți ce sunt prezentați în Corolarul 3.4.1, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. □

Exemplul 3.4.1. $4-T-$quasigrupul $((\mathbb{Z}_5, A)$, $A(x_1^4) = \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{4}x_4$ are exact zece parastrofi distincți. După cum se observă, $T-$forma $4-T$-quasigrupului $(\mathbb{Z}_5, A)$, corespunde formei prezentate în Corolarul 3.4.1. Prin urmare, pentru a determina forma parastrofilor distincți ai acestui $4-T-$quasigrup este suficient de aplicat releațiile prezentate în Corolarul 3.4.1:

$$\alpha = 2, \qquad I = 4, \qquad \alpha^{-1} = 3, \qquad I\alpha^{-1}c = 0.$$

Substituind aceste relații, obținem:

$$A(x_1^4) = \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{4}x_4, \qquad {}^{(25)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{3}x_4,$$

$${}^{(14)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{2}x_4, \qquad {}^{(35)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{3}x_4,$$

$${}^{(24)}A(x_1^4) = \bar{2}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{2}x_4, \qquad {}^{(14)(35)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{4}x_4,$$

$${}^{(34)}A(x_1^4) = \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{2}x_4, \qquad {}^{(14)(25)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{4}x_4,$$

$${}^{(15)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{3}x_4, \qquad {}^{(24)(35)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{4}x_4. \square$$

Exemplul 3.4.2. $4-T-$quasigrupul $(\mathbb{Z}_8, A)$, $A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{7}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{7}x_4 + \bar{2}$ are exact zece parastrofi distincți. După cum se observă, $T-$ forma $4-T-$ quasigrupului $(\mathbb{Z}_8, A)$, corespunde formei T_9 prezentate în Propoziția 3.4.2. Mulțimea parastrofilor ce coincid ai acestui $4-T-$quasigrup este subgrupul $H_{14} = \langle (245), (13), (24) \rangle$. După cum este arătat în Anexa 2, elementele acestui subgrup sunt

$$H_{14} = \{\varepsilon, (13), (24), (25), (45), (245), (254), (13)(24), (13)(25),$$
$$(13)(45), (13)(245), (13)(254)\},$$

iar clasele de rest sunt reprezentate de elementele ε, $(12), (14), (15)$, (23), (34), (35), $(12)(34)$, $(12)(35)$, $(14)(35)$. Pentru a determina parastrofii acestui quasigrup este suficient de aplicat relațiile prezentate în Anexa 5.

$$\alpha = \bar{3}, \qquad I = \bar{7}, \qquad \alpha^{-1} = \bar{3}, \qquad c = \bar{2}, \qquad I\alpha^{-1}c = 2$$

Substituind în relațiile prezentate în Anexa 5, obținem:

$$A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{7}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{7}x_4 + \bar{2},$$

$${}^{(12)}A(x_1^4) = \bar{7}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{7}x_4 + \bar{2},$$

$${}^{(14)}A(x_1^4) = \bar{7}x_1 + \bar{7}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{3}x_4 + \bar{2},$$

$${}^{(23)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{7}x_3 + \bar{7}x_4 + \bar{2},$$

$${}^{(34)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{7}x_2 + \bar{7}x_3 + \bar{3}x_4 + \bar{2},$$

$${}^{(15)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{7}x_3 + \bar{3}x_4 + \bar{2},$$

$${}^{(35)}A(x_1^4) = \bar{7}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{3}x_4 + \bar{2},$$

$${}^{(12)(34)}A(x_1^4) = \bar{7}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{7}x_3 + \bar{3}x_4 + \bar{2},$$

$${}^{(12)(35)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{7}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{3}x_4 + \bar{2},$$

$${}^{(14)(35)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{7}x_4 + \bar{2}.$$

3.5. Inexistența $4 - T$ −quasigrupurilor cu exact 15 parastrofi distincți

Quasigrupurile 4 −are cu exact 15 parastrofi distincți sunt caracterizate de subgrupurile de ordinul 8. Grupul S_5 are 15 astfel de subgrupuri izomorfe între ele și sunt izomorfe grupului D_8. Acestea sunt:

$H_1 = \langle(1234),(13)\rangle$ $\quad H_6 = \langle(1325),(12)\rangle$ $\quad H_{11} = \langle(1354),(15)\rangle$

$H_2 = \langle(1243),(14)\rangle$ $\quad H_7 = \langle(1245),(14)\rangle$ $\quad H_{12} = \langle(1435),(13)\rangle$

$H_3 = \langle(1324),(12)\rangle$ $\quad H_8 = \langle(1254),(15)\rangle$ $\quad H_{13} = \langle(2345),(24)\rangle$

$H_4 = \langle(1235),(13)\rangle$ $\quad H_9 = \langle(1425),(12)\rangle$ $\quad H_{14} = \langle(2354),(25)\rangle$

$H_5 = \langle(1253),(15)\rangle$ $\quad H_{10} = \langle(1345),(14)\rangle$ $\quad H_{15} = \langle(2435),(23)\rangle$

Detaliat, elementele acestor subgrupuri sunt prezentate în Anexa 2. Fiecare subgrup de ordinul 8 este generat de un element de ordinul 4 și o transpoziție. Generatorii acestor subgrupuri au forma

$$\alpha = (ijkm), \beta = (ik), i, j, k, m = 1, 2, 3, 4, 5,$$

iar oricare două dintre numerele $i,\ j,\ k,\ m$ sunt distincte. Elementele subgrupului sunt

$$\varepsilon, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta$$

și satisfac relațiile $\alpha^4 = \beta^2 = \varepsilon, \alpha\beta = \beta\alpha$.

Propoziția 3.5.1. *Nu există* $4 - T$ *−quasigrupuri cu exact 15 parastrofi distincți.*

Demonstrație. Fie (Q, A) un $4 - T$ −quasigrup cu T −forma $\big((Q,+), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c\big)$, atunci operația de quasigrup este data de relația (2.2.1). Arătăm că $H \neq H_i, \forall i = \overline{1,15}$, unde

$$H = \{\sigma \in S_5 |\ {}^{\sigma}A = A\} \cong D_8.$$

Fie $H = H_1 = \langle (1234), (13) \rangle$. Din $(13) \in H_1$, avem

$$^{(13)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

ce este echivalentă cu $A(x_3, x_2, x_1, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din această egalitate și (3.12), obținem:

$$\alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_4 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c$$

$$\alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 \tag{3.113}$$

Substituind $x_1 = 0$ în (3.113), avem

$$\alpha_1 = \alpha_3 \tag{3.114}$$

Analog, din $(24) \in H_1$, reiese că

$$\alpha_2 = \alpha_4 \tag{3.115}$$

Din $(12)(34) \in H_1$, avem $^{(12)(34)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ce este echivalentă cu $A(x_2, x_1, x_4, x_3) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din această egalitate, (3.114), (3.115) și (3.12), obținem:

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_3 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_4 + c.$$

Luând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, primim $\alpha_1 x_4 = \alpha_2 x_4, \forall x_4 \in Q \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$. Astfel, (3.12) are forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_4 + c \tag{3.116}$$

$(14) \notin H_1$, prin urmare $^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ceea ce implică $A(x_4, x_2, x_3, x_1) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din ultima egalitate și (3.116), obținem:

$$\alpha_1 x_4 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_1 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_4 + c \tag{3.117}$$

Deoarece $(Q, +)$ este grup abelian, (3.117) este o contradicție.

Fie $H = H_2 = \langle (1243), (14) \rangle$. Subgrupul H conține elementele (14) și (23), ce implică egalitățile $^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$ și $^{(23)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din definiția parstrofilor corespunzători, obținem

$$A(x_4, x_2, x_3, x_1) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{3.118}$$

$$A(x_1, x_3, x_2, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{3.119}$$

Din (3.12) și (3.118), pentru $x_1 = 0$, avem $\alpha_1 = \alpha_4$, iar din (3.12) și (3.119), pentru $x_2 = 0$, primim $\alpha_2 = \alpha_3$. Din faptul că, $(12)(34) \in H_2$, avem $^{(12)(34)}A(x_1^4) = A(x_1^4)$. Din definiția parastrofului respectiv, obținem $A(x_2, x_1, x_4, x_3) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Aplicând asupra ultimii egalități relația (3.12) și considerând $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_1 = \alpha_2$. Din tranzitivitatea relației de egalitate, avem $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$, iar operația de $T-$quasigrup are forma (3.116). Din (3.116) și faptul că $(12) \notin H_2$, primim $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ceea ce este o contradicție.

Fie $H = H_3$. Deoarece $(12), (34), (13)(24) \in H_3$, obținem $^{(12)}A(x_1^4) = A(x_1^4)$, $^{(34)}A(x_1^4) = A(x_1^4)$, $^{(13)(24)}A(x_1^4) = A(x_1^4)$. Din aceste egalități și definiția parastrofilor respectivi, primim:

$$A(x_2, x_1, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{3.120}$$

$$A(x_1, x_2, x_4, x_3) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{3.121}$$

$$A(x_3, x_4, x_1, x_2) = A(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{3.122}$$

Din (3.12) și (3.120), pentru $x_2 = 0$, obținem $\alpha_1 = \alpha_2$, iar din (3.12) și (3.121), pentru $x_3 = 0$, avem $\alpha_3 = \alpha_4$. Aplicând în (3.122) relația (3.12) și ținând cont de condițiile obținute, primim:

$$\alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_4 + \alpha_3 x_1 + \alpha_3 x_2 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4 + c.$$

Luând în ultima egalitate $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_3 x_1 = \alpha_1\, x_1, \forall x_1 \in Q \Leftrightarrow \alpha_3 = \alpha_1$, ce implică faptul că (3.12) coincide cu (3.116). Din faptul că $(14) \notin H_3$, obținem inegalitatea

$$^{(14)}A(x_1^4) \neq A(x_1^4) \Leftrightarrow A(x_4, x_2, x_3, x_1) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Aplicând în ultima inegalitate (3.116), avem:

$$\alpha_1 x_4 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_1 + c \neq \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_1 x_4 + c,$$

ceea ce este o contradicție.

Fie $H = H_4 = \langle(1235), (13)\rangle$. Din condiția că $(13) \in H_4$ și din (3.12), pentru $x_3 = 0$, avem $\alpha_1 = \alpha_3$. Deoarece $(25) \in H_4$, obținem $^{(25)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din definiția parastrofului respectiv, egalitatea precedentă implică $A(x_1, A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_3, x_4) = x_2$. Din ulrima egalitate și (3.12), obținem

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = x_2. \tag{3.123}$$

Substituind în (3.123) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_2 c + c = 0$. Din această egalitate și (3.123), obținem $\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4) + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 = x_2$. Luând în această egalitate $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, primi $\alpha_2(\alpha_4 x_4) + \alpha_4 x_4 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2(\alpha_4 x_4) = I(\alpha_4 x_4) \Leftrightarrow \alpha_2 = I$. Prin urmare,

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + I x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 + c \tag{3.124}$$

$(15)(23) \in H_4$, deci $^{(15)(23)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Atunci

$$A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_3, x_2, x_4) = x_1 \tag{3.125}$$

Din (3,125) și (3.124), obținem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + I x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + I x_3 + \alpha_1 x_2 + \alpha_4 x_4 + c = x_1.$$

Luând în această egalitate $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, primim $\alpha_1 c + c = 0$. Substituind în ultima egalitate, obținem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4) + I x_3 + \alpha_4 x_4 = x_1.$$

Considerând $x_1 = x_3 = 0$, avem $\alpha_1(\alpha_4 x_4) + \alpha_4 x_4 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_4 x_4) = I(\alpha_4 x_4) \Leftrightarrow \alpha_1 = I$. În așa mod, relația (3.124) ia forma

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = I x_1 + I x_2 + I x_3 + \alpha_4 x_4 + c \tag{3.126}$$

Din $(12) \notin H_4$, reiese că ${}^{(12)}A(x_1^4) = A(x_1^4) \Leftrightarrow A(x_2, x_1, x_3, x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din ultima egalitate și (3.126), avem $Ix_2 + Ix_1 + Ix_3 + \alpha_4 x_4 + c = Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + \alpha_4 x_4 + c$, ceea ce reprezintă o contradicție.

Fie $H = H_5 = \langle(1253), (15)\rangle$. Fiindcă $(23) \in H_5$ și din (3.12), primim $\alpha_2 = \alpha_3$. Din condiția că $(15) \in H_5$, obținem $A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_2, x_3, x_4) = x_1$. Din (3.12) și ultima egalitate, avem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = x_1 \qquad (3.127)$$

Luând $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, reiese că $\alpha_1 c + c = 0$. Ținând cont de această egalitate și punând $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, din (3.127), primim $\alpha_1(\alpha_2 x_3) + \alpha_2 x_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_2 x_3) = I(\alpha_2 x_3)$, de unde obținem $\alpha_1 = I$. Prin urmare

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ix_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_4 x_4 + c \qquad (3.128)$$

Deoarece $(12)(35) \in H_5$, avem ${}^{(12)(35)}A(x_1^4) = A(x_1^4) \Leftrightarrow A(x_2, x_1, A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_4) = x_3$. Din (3.128) și ultima egalitate, rezultă

$$Ix_2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_2(Ix_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_4 x_4 + c = x_3 \qquad (3.129)$$

Luând în (3.129) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_2 c + c = 0$, iar pentru $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ din aceeași relație obținem $\alpha_2(\alpha_4 x_4) + \alpha_4 x_4 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2(\alpha_4 x_4) = I(\alpha_4 x_4), \forall x_4 \in Q$. Prin urmare, $\alpha_2 = I$, iar (3.128) ia forma

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + \alpha_4 x_4 + c \qquad (3.130)$$

$(12) \notin H_5$, de unde reiese că ${}^{(12)}A(x_1^4) \neq A(x_1^4) \Leftrightarrow A(x_2, x_1, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Aplicând (3.130), obținem:

$$Ix_2 + Ix_1 + Ix_3 + \alpha_4 x_4 + c \neq Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + \alpha_4 x_4 + c,$$

ceea ce este o contradicție, deoarece $(Q, +)$ este grup abelian.

Fie $H = H_6 = \langle(1325), (12)\rangle$. Fiindcă $(12) \in H_6$, din (3.12), primim $\alpha_1 = \alpha_2$. Din condiția că $(35) \in H_6$, obținem $A(x_1, x_2, A(x_1, x_2, x_3, x_4),\ x_4) = x_3$. Din (3.12) și ultima egalitate, avem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_4 x_4 + c = x_3 \qquad (3.131)$$

Luând în (3.131) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, reiese că $\alpha_3 c + c = 0$. Ținând cont de această egalitate și punând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, din (3.131), avem $\alpha_3(\alpha_4 x_4) + \alpha_4 x_4 = 0 \Leftrightarrow \alpha_3(\alpha_4 x_4) = I(\alpha_4 x_4)$, de unde obținem $\alpha_3 = I$. Prin urmare,

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + Ix_3 + \alpha_4 x_4 + c \qquad (3.132)$$

Din $(13)(25) \in H_6$, avem ${}^{(13)(25)}A(x_1^4) = A(x_1^4) \Leftrightarrow A(x_3, A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_1, x_4) = x_2$. Din (3.132) și ultima egalitate, rezultă

$$\alpha_1 x_3 + \alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + Ix_3 + \alpha_4 x_4 + c) + Ix_1 + \alpha_4 x_4 + c = x_2 \quad (3.133)$$

Substituind în (3.133) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_1 c + c = 0$, iar pentru $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ din aceeași relație obținem $\alpha_1(\alpha_4 x_4) + \alpha_4 x_4 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_4 x_4) = I(\alpha_4 x_4), \forall x_4 \in Q$. Prin urmare, $\alpha_1 = I$, iar (3.132) ia forma (3.130).

$(13) \notin H_6$, de unde avem

$$^{(13)}A(x_1^4) \neq A(x_1^4) \Leftrightarrow A(x_3, x_2, x_1, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Aplicând (3.130), obținem:

$$Ix_3 + Ix_2 + Ix_1 + \alpha_4 x_4 + c \neq Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + \alpha_4 x_4 + c,$$

ceea ce este o contradicție, deoarece $(Q, +)$ este grup abelian.

Fie $H = H_7 = \langle (1245), (14) \rangle$. Deoarece $(14) \in H_7$, avem $^{(14)}A(x_1^4) = A(x_1^4)$. Din definiția parastrofului respectiv, primim $A(x_4, x_2, x_3, x_1) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Aplicând asupra acestei egalități (3.12), obținem $\alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_1 + c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c$. Substituind în această egalitate $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, primim $\alpha_4 x_1 = \alpha_1 x_1 \Leftrightarrow \alpha_4 = \alpha_1$. Fiindcă $(25) \in H_7 \Leftrightarrow {}^{(25)}A(x_1^4) = A(x_1^4)$. Conform definiției parastrofului $^{(25)}A(x_1^4)$, avem

$$A(x_1, A(x_1, x_2, x_2, x_4), x_3, x_4) = x_2 \quad (3.134)$$

Din (3.12), (3.134) și $\alpha_4 = \alpha_1$, obținem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c) + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c = x_2 \quad (3.135)$$

Luând în (3.135) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, primim $\alpha_2 c + c = 0$, iar pentru $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, primim $\alpha_2(\alpha_1 x_4) + \alpha_1 x_4 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2(\alpha_1 x_4) = I(\alpha_1 x_4), \forall x_4 \in Q \Leftrightarrow \alpha_2 = I$. Deci, (3.12) ia forma

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + Ix_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c \quad (3.136)$$

$(15)(24) \in H_7$, prin urmare, $^{(15)(24)}A(x_1^4) = A(x_1^4)$, ceea ce implică

$$A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_4, x_3, x_1) = x_1 \quad (3.137)$$

Aplicând în (3.136) și (3.137), avem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + Ix_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c) + Ix_4 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c = x_1 \quad (3.138)$$

Din (3.138), pentru $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, primim $\alpha_1 c + c = 0$. Subtituind această egalitate în (3.138) și luând $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_1(\alpha_3 x_3) + \alpha_3 x_3 = 0, \forall x_3 \in Q$, ce este echivalentă cu $\alpha_1(\alpha_3 x_3) = I(\alpha_3 x_3) \Leftrightarrow \alpha_1 = I$. În așa mod (3.136) ia forma:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ix_1 + Ix_2 + \alpha_3 x_3 + Ix_4 + c. \quad (3.139)$$

$(12) \notin H_7 \Leftrightarrow {}^{(12)}A(x_1^4) \neq A(x_1^4)$. Din definiția parastrofulu $^{(12)}A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, avem $A(x_2, x_1, x_3, x_4) \neq A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din această inegalitate și (3.139), obținem

$$Ix_2 + Ix_1 + \alpha_3 x_3 + Ix_4 + c \neq Ix_1 + Ix_2 + \alpha_3 x_3 + Ix_4 + c$$

ceea ce este o contradicție.

Fie $H = H_8 = \langle (1254), (15) \rangle$. Fiindcă $(24) \in H_8$, avem ${}^{(24)}A(x_1^4) = A(x_1^4)$, ce este echivalentă cu $A(x_1, x_4, x_3, x_2) = A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Din ultima egalitate și (3.12), obținem $\alpha_2 x_4 + \alpha_4 x_2 = \alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4$. Substituind în această egalitate $x_1 = 0$, primim $\alpha_2 x_4 = \alpha_4 x_4$, de unde obținem $\alpha_4 = \alpha_2$. Deoarece $(15) \in H_8$, reiese că ${}^{(15)}A(x_1^4) = A(x_1^4)$. Conform definiției parastrofului ${}^{(15)}A(x_1^4)$, avem $A(A(x_1, x_2, x_2, x_4), x_2, x_3, x_4) = x_1$. Considerând în această egalitate $\alpha_4 = \alpha_2$ și (3.12), obținem:

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_2 x_4 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_2 x_4 + c = x_1 \qquad (3.140)$$

Luând în (3.140) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, primim $\alpha_1 c + c = 0$, iar pentru $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, primim $\alpha_1(\alpha_3 x_3) + \alpha_3 x_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_3 x_3) = I(\alpha_3 x_3), \forall x_3 \in Q \Leftrightarrow \alpha_1 = I$. Deci, (3.12) ia forma

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ix_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_2 x_4 + c \qquad (3.141)$$

$(12)(45) \in H_8$, prin urmare, ${}^{(12)(45)}A(x_1^4) = A(x_1^4)$, ceea ce implică

$$A\big(x_2, x_1, x_3, A(x_1, x_2, x_3, x_4)\big) = x_4 \qquad (3.142)$$

Luând în (3.142), (3.141) obținem:

$$Ix_2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_2(Ix_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_2 x_4 + c) + c = x_4 \qquad (3.143)$$

Din (3.143), pentru $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, primim $\alpha_2 c + c = 0$. Subtituind această egalitate în (3.143) și luând $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_2(\alpha_3 x_3) + \alpha_3 x_3 = 0, \forall x_3 \in Q$, ce este echivalentă cu $\alpha_2(\alpha_3 x_3) = I(\alpha_3 x_3) \Leftrightarrow \alpha_2 = I$. În așa mod (3.143) primește forma (3.139). Din faptul că, $(12) \notin H_8$, procedând analog cazului precedent, obținem o contradicție.

Fie $H = H_9 = \langle (1425), (12) \rangle$. Deoarece $(1425) \in H_9$, reiese că $A(x_1^4) = {}^{(1425)}A(x_1^4)$, ce este echivalentă cu egalitatea $A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_4, x_3, x_1) = x_2$. Utilizând forma operației, avem

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_1 + c = x_2. \qquad (3.144)$$

Pentru $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, avem $\alpha_1(\alpha_3 x_3 + c) + \alpha_3 x_3 + c = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = I$. Substituind în (3.144) și luând $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $I(\alpha_2 x_2) = x_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = I$. Prin urmare, (3.12) ia forma $A(x_1^4) = Ix_1 + Ix_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c$. Deoarece $(12) \notin H_9$, avem $A(x_1^4) \neq {}^{(12)}A(x_1^4)$, iar aplicând în această inegalitate ultima egalitate obținem o contradicție.

Fie $H = H_{10} = \langle (1345), (14) \rangle$. Deoarece $(1345) \in H_{10}$, avem $A(x_1^4) = {}^{(1345)}A(x_1^4)$, ce este echivalentă cu egalitatea $A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_2, x_1, x_3) = x_4$. Aplicând (3.2.1), primim

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_3 + c = x_4. \qquad (3.145)$$

Pentru $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_1(\alpha_2 x_2 + c) + \alpha_2 x_2 + c = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = I$. Punând în (3.145) și luând $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, obținem $I(\alpha_3 x_3) + \alpha_4 x_3 = 0$, de unde rezultă $\alpha_4 x_3 = \alpha_3 x_3$, $\forall x_3 \in Q \Leftrightarrow \alpha_3 = \alpha_4$. Prin urmare, (3.12) ia forma

$$A(x_1^4) = Ix_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4 + c.$$

Deoarece $(34) \notin H_{10}$, avem $A(x_1^4) \neq {}^{(34)}A(x_1^4)$, iar aplicând în această inegalitate ultima egalitate obținem o contradicție.

Fie $H = H_{11} = \langle(1354), (15)\rangle$. Deoarece $(1354) \in H_{11}$, avem $A(x_1^4) = {}^{(1354)}A(x_1^4)$, ce este echivalentă cu egalitatea $A\big(x_4, x_2, x_1, A(x_1, x_2, x_3, x_4)\big) = x_3$. Aplicând (3.12), primim

$$\alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + c = x_3. \qquad (3.146)$$

Pentru $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_2 x_2 + \alpha_4(\alpha_2 x_2 + c) + c = 0 \Leftrightarrow \alpha_4 = I$. Substituind în (3.146) și luând $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_3 x_1 + I(\alpha_1 x_1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_3$. Prin urmare, (3.12) ia forma $A(x_1^4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + Ix_4 + c$. Deoarece$(13) \notin H_{11}$, avem $A(x_1^4) \neq {}^{(13)}A(x_1^4)$, iar aplicând în această inegalitate ultima egalitate obținem o contradicție.

Fie $H = H_{12} = \langle(1435), (13)\rangle$. Deoarece $(1435) \in H_{12}$, avem $A(x_1^4) = {}^{(1435)}A(x_1^4)$, ce este echivalentă cu $A(A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_2, x_4, x_1) = x_3$. Din (3.12), rezultă

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_4 + \alpha_4 x_1 + c = x_3. \qquad (3.147)$$

Luând $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_1 = I$. Utilizând ultima egalitate în (3.5.16) și luând $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_4 = I$. Prin urmare, $A(x_1^4) = Ix_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + Ix_4 + c$. Deoarece $(14) \notin H_{11}$, avem $A(x_1^4) \neq {}^{(14)}A(x_1^4)$, iar aplicând ultima egalitate, obținem contradicție.

Fie $H = H_{13} = \langle(2345), (24)\rangle$. Deoarece $(2345) \in H_{13}$, avem $A(x_1^4) = {}^{(2345)}A(x_1^4)$, ce implică egalitatea $A(x_1, A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_2, x_3) = x_4$. Din (3.12) și ultima egalitate, rezultă

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_3 + c = x_4. \qquad (3.148)$$

Pentru $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + c) + c = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = I$. Substituind în (3.148) și luând $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, obținem $I(\alpha_3 x_3) + \alpha_4 x_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 = \alpha_4$. Prin urmare, (3.12) ia forma $A(x_1^4) = \alpha_1 x_1 + Ix_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4 + c$. Deoarece$(34) \notin H_{13}$, avem $A(x_1^4) \neq {}^{(34)}A(x_1^4)$, iar aplicând ultima egalitate aceasta conduce la o contradicție.

Fie $H = H_{14} = \langle(2354), (25)\rangle$. Deoarece $(2354) \in H_{14}$, avem $A(x_1^4) = {}^{(2354)}A(x_1^4)$, ce implică egalitatea $A\big(x_1, x_4, x_2, A(x_1, x_2, x_3, x_4)\big) = x_3$. Din (3.12), rezultă

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + c = x_3. \qquad (3.149)$$

Din $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_1 x_1 + \alpha_4(\alpha_1 x_1 + c) + c = 0 \Leftrightarrow \alpha_4 = I$. Substituind în (3.149) și luând $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_3 x_2 + I(\alpha_2 x_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_3$. Prin urmare, (3.12) ia forma $A(x_1^4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 + I x_4 + c$. Deoarece $(23) \notin H_{14}$, avem $A(x_1^4) \neq {}^{(23)}A(x_1^4)$, ceea ce este o contradicție, în baza ultimei egalități.

Fie $H = H_{15} = \langle(2435), (23)\rangle$. Fiindcă $(2435) \in H_{15}$, primim $A(x_1^4) = {}^{(2435)}A(x_1^4)$, ce implică egalitatea $A(x_1, A(x_1, x_2, x_3, x_4), x_4, x_2) = x_3$. Aplicând (3.12), primim

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_3 x_4 + \alpha_4 x_2 + c = x_3. \qquad (3.150)$$

Pentru $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + c) + c = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = I$. Substituind în (3.150) și luând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, obținem $I(\alpha_4 x_4) + \alpha_3 x_4 = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 = \alpha_4$. Prin urmare, (3.12) ia forma $A(x_1^4) = \alpha_1 x_1 + I x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 x_4 + c$. Deoarece $(34) \notin H_{15}$, avem $A(x_1^4) \neq {}^{(34)}A(x_1^4)$, iar aplicând ultima egalitate vom obține o contradicție.□

3.6. T −Quasigrupuri 4 −are cu exact douăzeci de parastrofi distincți

Pentru a obține caracterizarea T-formei 4-T-quasigrupurilor cu exact 20 de parastrofi distincți, considerăm toate subgrupurile de ordinul 6 ale grupului S_5. Acest grup are 30 astfel de subgrupuri și anume:

1) 10 subgrupuri izomorfe grupului Z_6:

$$H_1 = \langle(123)(45)\rangle,\ H_2 = \langle(124)(35)\rangle,\ H_3 = \langle(125)(34)\rangle,\ H_4 = \langle(134)(25)\rangle,$$
$$H_5 = \langle(135)(24)\rangle,\quad H_6 = \langle(145)(34)\rangle,\quad H_7 = \langle(234)(15)\rangle,$$
$$H_8 = \langle(235)(14)\rangle,\quad H_9 = \langle(245)(13)\rangle,\quad H_{10} = \langle(345)(12)\rangle;$$

2) 20 subgrupuri izomorfe cu S_3, ce sunt generate de două substituții α și β, de ordinul 3 și, respectiv 2, incluzând:

2a) 10 subgrupuri, unde β este transpoziție:

$$H_{11} = \langle(123), (12)\rangle,\ H_{12} = \langle(124), (12)\rangle,\ H_{13} = \langle(134), (13)\rangle,$$
$$H_{14} = \langle(125), (12)\rangle,\quad H_{15} = \langle(135), (13)\rangle,\ H_{16} = \langle(145), (14)\rangle,$$
$$H_{17} = \langle(234), (23)\rangle,\quad H_{18} = \langle(235), (23)\rangle, H_{19} = \langle(245), (24)\rangle,$$
$$H_{20} = \langle(345), (34)\rangle;$$

2b) 10 subgrupuri unde β este produs de două transpoziții independente;

$$H_{21} = \langle(123), (12)(45)\rangle,\ H_{22} = \langle(124), (12)(35)\rangle,\ H_{23} = \langle(125), (12)(34)\rangle,$$
$$H_{24} = \langle(134), (13)(25)\rangle,\quad H_{25} = \langle(135), (13)(24)\rangle,\ H_{26} = \langle(145), (14)(23)\rangle,$$
$$H_{27} = \langle(234), (23)(15)\rangle,\quad H_{28} = \langle(235), (23)(14)\rangle,\quad H_{29} = \langle(245), (13)(24)\rangle,$$
$$H_{30} = \langle(345), (34)(12)\rangle.$$

Teorema 3.6.1. *Fie (Q, A) un* $4-T-$*quasigrup cu* $T-$*grupul* $(Q, +)$ *și fie* $H \in \{H_i,\ i =$

$\overline{11,20}\}$, *unde* $H = \{\sigma \in S_5 | {}^{\sigma}A = A\}$. *Atunci există* $\alpha, \beta \in Aut(Q, +)$ *și un element* $c \in Q$, *astfel încât* $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq I$, $\beta \neq I$, $\alpha c + c \neq 0$, $\beta c + c \neq 0$, $Ix = -x$, $\forall x \in Q$, *unde* 0 *este elementul neutru al grupului abelian* $(Q, +)$, *astfel încât* (Q, A) *are una dintre următoarele* T *−forme:*

$$T_1 = \big((Q,+), \alpha, \alpha, \alpha, \beta, c\big), \quad T_2 = \big((Q,+), \alpha, \alpha, \beta, \alpha, c\big), \quad T_3 = ((Q,+), \alpha, \beta, \alpha, \alpha, c),$$
$$T_4 = ((Q,+), \beta, \alpha, \alpha, \alpha, c), \quad T_5 = ((Q,+), I, I, \alpha, \beta, c), \quad T_6 = ((Q,+), I, \alpha, I, \beta, c),$$
$$T_7 = \big((Q,+), I, \alpha, \beta, I, c\big), \quad T_8 = \big((Q,+), \alpha, I, I, \beta, c\big), \quad T_9 = ((Q,+), \alpha, I, \beta, I, c),$$
$$T_{10} = ((Q,+), \alpha, \beta, I, I, c).$$

Demonstrație. Fie (Q, A) un $4 - T$ −quasigrup cu T −forma $T = ((Q,+), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c)$ și fie $H \in \{H_i, i = \overline{11,20}\}$, unde $H = \{\sigma \in S_5 \,|{}^{\sigma}A = A\}$.

1) Dacă $H = H_{11} = \langle(123), (12)\rangle = \{\varepsilon, (123), (132), (12), (13), (23)\}$, atunci avem $(12), (13) \in H$, prin urmare $A =^{(12)} A$ și $A = {}^{(13)}A$, de unde obținem:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_4 + c \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_1. \end{cases}$$

Luând $x_1 = 0$, ultimele două egalități implică $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Notând $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ și $\alpha_4 = \beta$, operația A ia forma:

$$A(x_1^4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c,$$

unde $4 -$ tupla (x_1, x_2, x_3, x_4) este notată prin (x_1^4).

Deoarece $(14) \notin H_{11}$, avem:

$$A \neq {}^{(14)}A \Leftrightarrow \alpha x_1 + \beta x_4 \neq \beta x_1 + \alpha x_4 \Leftrightarrow \alpha(x_1 - x_4) \neq \beta(x_1 - x_4),$$

Prin urmare $\alpha \neq \beta$. Deasemenea, $(15) \notin H_{11} \Rightarrow A \neq {}^{(15)}A \Rightarrow A(A(x_1^4), x_2, x_3, x_4) \neq x_1 \Rightarrow$

$$\alpha(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c) + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c \neq x_1.$$

Notând $\alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c$ prin y din ultima inegalitate obținem:

$$\alpha(\alpha x_1 + y) + y \neq x_1,$$

care pentru $\alpha = I$, implică $-(-x_1 + y) + y \neq x_1 \Leftrightarrow x_1 \neq x_1$, ceea ce este o contradicție. Prin urmare, $\alpha \neq I$.

Analogic, deoarece $(45) \notin H_{11}$ avem:

$$A \neq {}^{(45)}A \Rightarrow A\big(x_1, x_2, x_3, A(x_1^4)\big) \neq x_4 \Leftrightarrow$$
$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c) + c \neq x_4.$$

Notând $\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c$ prin y din ultima inegalitate avem:

$$y + \beta(y + \beta x_4) \neq x_4,$$

ce implică $\beta \neq I$ (pentru $\beta = I$ primim $x_4 \neq x_4$, ceea ce este o contradicție).

2) Fie $H = H_{12} = \langle (124), (12) \rangle = \{\varepsilon, (124), (142), (12), (24), (14)\}$.

Atunci $(12), (14) \in H$, adică $A = {}^{(12)}A$ și $A = {}^{(14)}A$, astfel $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1$ și $\alpha_1 x_1 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 + \alpha_4 x_1$, ce implică $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4$. Notând $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha$ și $\alpha_3 = \beta$, primim T −forma: $T_2 = \big((Q, +), \alpha, \alpha, \beta, \alpha, c\big)$.

Așa cum (13), (15) și (35) nu aparțin H_{12}, avem: $A \neq {}^{(13)}A$, $A \neq {}^{(15)}A$ și $A \neq {}^{(35)}A$, prin urmare:

$$\alpha x_1 + \beta x_3 \neq \alpha x_3 + \beta x_1,$$
$$\alpha(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \alpha x_4 + c) + \alpha x_2 + \beta x_3 + \alpha x_4 + c \neq x_1,$$
$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \alpha x_4 + c) + \alpha x_4 + c \neq x_3,$$

ceea ce implică, analogic p. 1), $\alpha \neq \beta, \alpha \neq I$ și $\beta \neq I$, respectiv.

3) $H = H_{13} = \langle (134), (13) \rangle = \{\varepsilon, (134), (143), (13), (34), (14)\}$. Utilizând faptul că $(13), (14) \in H_{13}$, obținem $A = {}^{(13)}A$ și $A = {}^{(14)}A$, de unde avem $\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_1$ și $\alpha_1 x_1 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 + \alpha_4 x_1$, ceea ce implică $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4$. Notând $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4$ prin α și α_2 prin β, primim că T −forma quasigrupului este $((Q, +), \alpha, \beta, \alpha, \alpha, c) = T_3$.

Din faptul că (12), (15) și (25) nu aparțin H_{13}, adică $A \neq {}^{(12)}A$, $A \neq {}^{(15)}A$ și $A \neq {}^{(25)}A$, obținem:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \neq \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1,$$
$$\alpha(\alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c) + \beta x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \neq x_1,$$
$$\alpha x_1 + \beta(\alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c) + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \neq x_2,$$

ce implică $\alpha \neq \beta, \alpha \neq I$ și $\beta \neq I$.

4) $H = H_{14} = \langle (125), (12) \rangle = \{\varepsilon, (125), (12), (152), (25), (15)\}$. Deoarece $(12), (15) \in H_{12}$, avem $A = {}^{(12)}A$ și $A = {}^{(15)}A$, adică

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1, \tag{3.151}$$

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = x_1 \tag{3.152}$$

Substituind $x_2 = 0$ în (3.152), obținem

$$\alpha_1 = \alpha_2. \tag{3.153}$$

Pentru $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, (3.152) implică

$$\alpha_1 c + c = 0. \tag{3.154}$$

Utilizând (3.153) și (3.154), și luând $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ în (3.152), primim

$$\alpha_1(\alpha_2 x_2) = I(\alpha_2 x_2),$$

adică $\alpha_1 = I$, deci

$$\alpha_1 = \alpha_2 = I. \tag{3.155}$$

Notând $\alpha_3 = \alpha$ și $\alpha_4 = \beta$, obținem $T-$forma $T_4 = ((Q,+), I, I, \alpha, \beta, c)$.

Acum, utilizând faptul că transpozițiile (23), (35), (14) nu aparțin H_{14}, avem inegalitățile:

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \neq \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2,$$

$$Ix_1 + Ix_2 + \alpha(Ix_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c) + \beta x_4 + c \neq x_3,$$

$$Ix_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + \beta(Ix_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c) + c \neq x_4,$$

ce implică $\alpha \neq \beta, \alpha \neq I$ și $\beta \neq I$, respectiv.

5) $H = H_{15} = \langle (135), (13) \rangle = \{\varepsilon, (135), (13), (35), (15), (153)\}$. Punând $(13), (15) \in H_{15}$, avem: ${}^{(13)}A = A$ și ${}^{(15)}A = A$, adică

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_1, \tag{3.156}$$

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = x_1. \tag{3.157}$$

Egalitatea (3.156) implică

$$\alpha_1 = \alpha_3, \tag{3.158}$$

și (3.157) implică $\alpha_1 c + c = 0$ $(x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0)$. Utilizând egalitatea $\alpha_1 c + c = 0$ și punând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ în (3.157), primim

$$\alpha_1(\alpha_4 x_4) + \alpha_4 x_4 = 0,$$

adică $\alpha_1 = I$. Conform (3.158), $\alpha_1 = \alpha_3 = I$, atunci notând $\alpha_2 = \alpha$ și $\alpha_4 = \beta$, primim $T_5 = ((Q,+), I, \alpha, I, \beta, c)$.

Deoarece (24), (25) și (45) nu aparțin H_{15}, au loc următoarele inegalități:

$$\alpha x_2 + \beta x_4 \neq \alpha x_4 + \beta x_2,$$

$$Ix_1 + \alpha(Ix_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + \beta x_4 + c) + Ix_3 + \beta x_4 + c \neq x_2,$$

$$Ix_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + \beta(Ix_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + \beta x_4 + c) + c \neq x_4,$$

ce implică, respectiv, $\alpha \neq \beta, \alpha \neq I, \beta \neq I$.

6) $H = H_{16} = \langle (145), (14) \rangle = \{\varepsilon, (145), (154), (14), (14), (45)\}$. Din $(14), (15) \in H_{16}$ reiese $A = {}^{(14)}A$ și $A = {}^{(15)}A$, adică

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 + \alpha_4 x_1,$$

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c = x_1, \tag{3.159}$$

ce implică, respectiv $\alpha_1 = \alpha_4$ și $\alpha_1 c + c = 0$. Utilizând ultima egalitate în (3.159) și punând $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, avem $\alpha_1(\alpha_2 x_2) = I(\alpha_2 x_2), \forall x_2 \in Q$, adică $\alpha_1 = I$, prin urmare

$$\alpha_1 = \alpha_4 = I. \tag{3.160}$$

Notând $\alpha_2 = \alpha$ și $\alpha_3 = \beta$, primim $T_6 = ((Q,+), I, \alpha, \beta, I, c)$.

Acum, utilizând faptul că (23), (25) și (35) nu aparțin H_{16}, primim inegalitățile

$$\alpha x_2 + \beta x_3 \neq \alpha x_3 + \beta x_2,$$

$$Ix_1 + \alpha(Ix_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + Ix_4 + c) + \beta x_3 + Ix_4 + c \neq x_3,$$

$$Ix_1 + \alpha x_2 + \beta(Ix_1 + \alpha\, x_2 + \beta x_3 + Ix_4 + c) + Ix_4 + c \neq x_3,$$

ce implică, respectiv, $\alpha \neq \beta, \alpha \neq I, \beta \neq I$.

7) $H_{17} = \langle(234),(23)\rangle = \{\varepsilon,(234),(243),(23),(24),(34)\}$. Din condiția că (23), $(24),(34) \in H_{17}$ au loc egalitățile: $A = {}^{(23)}A$, $A = {}^{(24)}A$, $A = {}^{(34)}A$, adică $\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2$,

$\alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4 = \alpha_2 x_4 + \alpha_4 x_2$, $\alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_3 x_4 + \alpha_4 x_3$, ce implică: $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

Notând $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$ and $\alpha_1 = \beta$, primim T −forma: $T_7 = \big((Q,+),\beta,\alpha,\alpha,\alpha,c\big)$. Inegalitățile $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq I$ și $\alpha \neq I$ reies, respectiv, din condițiile că $(12) \notin H_{17}, (15) \notin H_{17}, (25) \notin H_{17}$, astfel:

$$\beta x_1 + \alpha x_2 \neq \beta x_2 + \alpha x_1,$$

$$\beta(\beta x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c) + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \neq x_1,$$

$$\beta x_1 + \alpha(\beta x_2 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c) + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c \neq x_2.$$

8) $H = H_{18} = \langle(235),(23)\rangle = \{\varepsilon,(235),(23),(35),(253),(25)\}$. Din $(23),(35) \in H_{18}$, avem $A = {}^{(23)}A$ și $A = {}^{(35)}A$, prin urmare

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2,$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + \alpha_4 x_4 + c = x_3, \tag{3.161}$$

ce implică, respectiv,

$$\alpha_2 = \alpha_3 \tag{3.162}$$

și $\alpha_3 c + c = 0$. Utilizând ultima egalitate și punând $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ în (3.161), avem $\alpha_3(\alpha_1 x_1) = I(\alpha_1 x_1)$, ce implică $\alpha_3 = I$, astfel (conform (3.152)), $\alpha_1 = \alpha_3 = I$. Notând $\alpha_2 = \alpha$ și $\alpha_4 = \beta$, primim $T = T_8 = ((Q,+),\alpha,I,I,\beta,c)$.

Utilizând T_8 și faptul că $(14) \notin H_{18}, (15) \notin H_{18}$ și $(45) \notin H_{18}$, obținem inegalitățile:

$$\alpha x_1 + \beta x_4 \neq \alpha x_4 + \beta x_1,$$

$$\alpha(\alpha x_1 + Ix_2 + Ix_3 + \beta x_4 + c) + I\, x_2 + Ix_3 + \beta x_4 + c \neq x_1,$$

$$\alpha x_1 + Ix_2 + Ix_3 + \beta(\alpha x_1 + Ix_2 + Ix_3 + \beta x_4 + c) + c \neq x_4,$$

ce implică, respectiv, $\alpha \neq \beta, \alpha \neq I$ și $\beta \neq I$.

8) $H = H_{19} = \langle(245),(24)\rangle = \{\varepsilon,(245),(254),(24),(25),(25),(45)\}$.

Din $(24),(25) \in H_{19}$ urmează, respectiv,

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4 = \alpha_2 x_4 + \alpha_4 x_2,$$

$$\alpha_1x_1+\alpha_2(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4+c)+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4+c=x_2, \quad (3.163)$$

ce implică, $\alpha_2=\alpha_4$ și $\alpha_2c+c=0$. Utilizând egalitatea $\alpha_2c+c=0$ și punând $x_1=x_2=x_4=0$ în (3.163), primim $\alpha_2(\alpha_3x_3)=I(\alpha_3x_3)$, astfel $\alpha_2=I$, adică $\alpha_2=\alpha_4=I$. Notând $\alpha_1=\alpha$ și $\alpha_3=\beta$, obținem $T-$forma $T_9=((Q,+),\alpha,I,I,\beta,I,c)$. Acum, utilizând T_9 și faptul $(13)\notin H_{19},(15)\notin H_{19}$ și $(45)\notin H_{19}$ obținem inegalitățile:

$$\alpha x_1+\beta x_3\neq\alpha x_3+\beta x_1,$$

$$\alpha(\alpha x_1+Ix_2+\beta x_3+Ix_4+c)+Ix_2+\beta x_3+Ix_4+c\neq x_1,$$

$$\alpha x_1+Ix_2+\beta(\alpha x_1+Ix_2+\beta x_3+Ix_4+c)+Ix_3+c\neq x_3,$$

ce implică, respectiv, $\alpha\neq\beta,\ \beta\neq I,\ \alpha\neq I$.

10) $H=H_{20}=\langle(345),(34)\rangle=\{\varepsilon,(345),(354),(54),(35),(45)\}$. Deoarece $(34),(35)\in H_{20}$, avem $A={}^{(34)}A$ și $A={}^{(35)}A$, adică

$$\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=\alpha_3x_4+\alpha_4x_3,$$

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4+c)+\alpha_4x_4+c=x_3, \quad (3.164)$$

ceea ce implică, respectiv, $\alpha_3=\alpha_4$ și $\alpha_3c+c=0$. Utilizând egalitatea $\alpha_3c+c=0$ și punând $x_1=x_2=x_3=0$ în (3.164), obținem $\alpha_3(\alpha_4x_4)=I(\alpha_4x_4)$, astfel $\alpha_3=I$, adică $\alpha_3=\alpha_4=I$. Notând $\alpha_1=\alpha$ și $\alpha_2=\beta$ primim $T-$forma $T_{20}=((Q,+),\alpha,\beta,I,I,c)$. Inegalitățile $\alpha\neq\beta$, $\alpha\neq I$ și $\beta\neq I$ reies nemijlocit din faptul că $(12)\notin H_{20},(15)\notin H_{20}$ și $(25)\notin H_{20}$, (utilizând $T-$forma T_{10}), adică din următoarele inegalități, respectiv:

$$\alpha x_1+\beta x_2\neq\alpha x_2+\beta x_1,$$

$$\alpha(\alpha x_1+\beta x_2+Ix_3+Ix_4+c)+\beta x_2+Ix_3+Ix_4+c\neq x_1,$$

$$\alpha x_1+\beta(\alpha x_1+\beta x_2+Ix_3+Ix_4+c)+Ix_3+Ix_4+c\neq x_2. \quad \square$$

Propoziția 3.6.1. *$4-T-$quasigrupul (Q,A) cu $T-$forma $T_1=\big((Q,+),\alpha,\alpha,\alpha,\beta,c\big)$, unde $\alpha\neq\beta,\ \alpha\neq I,\beta\neq I,\ I(x)=-x,\forall x\in Q$, are exact 20 de parastrofi distincți.*

Demonstrație. Este suficient de arătat că $H=\{\sigma\in S_5|\ {}^{\sigma}A=A\}$ este subgrup de ordinul șase. Dacă T_1 este $T-$forma $4-T-$quasigrupului (Q, A), atunci

$$A(x_1^4)=\alpha x_1+\alpha x_2+\alpha x_3+\beta x_4+c,\forall x_1,x_2,x_3,x_4\in Q,$$

Astfel încât ${}^{\sigma}A=A,\forall\,\sigma\in S_5{}'$, unde $S_5{}'=\{\sigma\in S_5|\sigma(4)=4,\sigma(5)=5\}$, adică $S_5'\subseteq H$. Luând în considerare faptul că $\{S_5'\tau|\tau\in S_5\}$:

$$U=\{\varepsilon,(14),(24),(34),(15),(25),(35),(45),(14)(25),(14)(35),(15)(24),$$
$$(15)(34),(24)(35),(25)(34),(145),(154),(245),(254),(345),(354)\}.$$

Dacă $\tau\in U$, atunci $\beta\in S_5'\tau\Leftrightarrow\exists\sigma\in S_5':\beta\sigma\tau\Leftrightarrow {}^{\beta}A={}^{\sigma\tau}A={}^{\tau}({}^{\sigma}A)={}^{\tau}A$.

Vom demonstra mai jos că $\tau\notin H,\forall\tau\in U\setminus\{\varepsilon\}$, adică că $H=S_5{}'$.

Dacă $(14) \in H,$ atunci: $A = {}^{(14)}A \Leftrightarrow \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c = \alpha x_4 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_1 + c \Rightarrow \alpha = \beta,$ ceea ce este o contradicție, deoarece $(14) \notin H.$

În mod analog, $\alpha \neq \beta$ implică $(24) \notin H$ și $(34) \notin H.$

Dacă $(15) \in H$ atunci $A(x_1^4) = {}^{(15)}A(x_1^4) \Leftrightarrow A(A(x_1^4), x_2, x_3, x_4) = x_2 \Leftrightarrow \alpha(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c) + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c = x_1.$ Notând $\alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c$ prin $y,$ primim $\alpha(\alpha x_1 + y) + y = x_1,$ care (pentru $x_1 = 0$) implică $\alpha = I$- ceea ce este o cantrazicere, astfel $(15) \notin H.$

În mod analog obținem $(25) \notin H$ și $(35) \notin H.$ De asemenea,

$$A(x_1^4) = {}^{(45)}A(x_1^4) \Leftrightarrow A\big(x_1, x_2, x_3, A(x_1, x_2, x_3, x_4)\big) = x_4 \Leftrightarrow$$
$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c) + c = x_4.$$

Notând $\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + x = y$ în ultima egalitate primim: $\beta(\beta x_4 + y) + y = x_4,$ care (pentru $x_4 = 0$) implică $\beta = I -$ ceea ce este o contradicție, deoarece $(45) \notin H.$

Dacă $(14)(35) \in H,$ atunci:

$$A = {}^{(14)(35)}A \Leftrightarrow A(x_1^4) = {}^{(34)}A(x_4, x_2, x_3, x_1) \Leftrightarrow A(x_4, x_2, A(x_1^4), x_1) = x_3$$
$$\alpha x_4 + \alpha x_2 + \alpha(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c) + \beta x_1 + c = x_3. \qquad (3.165)$$

Luând $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ în ultima egalitate rezultă $\alpha c + c = 0.$ Utilizând $\alpha c + c = 0$ și atribuind $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ în (3.165) obținem $\alpha(\alpha x_2) = I(\alpha x_2),$ adică $\alpha = I,$ceea ce este o contradicție, așa cum $(14)(35) \notin H.$ În mod analog obținem $(14)(25) \notin H,$ $(15)(24) \notin H,$ $(15)(34) \notin H,$ $(24)(35) \notin H$ și $(25)(34) \notin H.$

Dacă $(145) \in H,$ atunci: $A = {}^{(145)}A \Leftrightarrow A\big(x_4, x_2, x_3, A(x_1^4)\big) = x_1 \Leftrightarrow$

$$\alpha x_4 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + c) + c = x_1. \qquad (3.166)$$

Luând în (3.166) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ rezultă $\beta c + c = 0.$ Utilizând egalitatea $\beta c + c = 0$ și atribuind $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ în (3.166), obținem $\beta(\alpha x_2) = I(\alpha x_2),$ ce implică $\beta = I,$ ce este o contradicție, deoarece $(145) \notin H.$

Analog obținem că fiecare dintre substituțiile: $(154), (245), (254), (345), (354)$ nu aparține $H.$ Prin urmare, $H = S_5' \cong S_3,$ adică (Q, A) are exact 20 de parastrofi distincți.□

Corolarul 3.6.1. *$4 - T -$quasigrupul (Q, A), unde $\{\sigma \in S_5 |\ A = {}^{\sigma}A\} = \langle(123), (23)\rangle,$ are exact 20 de parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha, \beta \in Aut(Q, +)$ și un element $c \in Q,$ astfel încât (Q, A) are $T -$forma $((Q, +), \alpha, \alpha, \alpha, \beta, c),$ unde $\alpha \neq \beta, \alpha \neq I, \beta \neq I, I(x) = -x, \forall x \in Q.$*

Teorema 3.6.2. *Nu există $4 - T -$quasigrupuri (Q, A), astfel încât grupul $H = \{\sigma \in S_5 |\ A =$*

${}^{\sigma}A\}$ *este izomorf cu* $\mathbb{Z}_6$.

Demonstrație. Fie (Q, A) un $4 - T -$quasigrup cu $T -$forma $((Q, +), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c)$, și fie $H = \{\sigma \in S_5 | \ A = {}^{\sigma}A\}$. Grupul S_5 are 10 subgrupuri izomorfe cu $\mathbb{Z}_6$: $H_i, \overline{1, 10}$. Vom arăta mai jos că $H \neq H_i$, pentru orice $i = \overline{1, 10}$.

Fie $H = H_1 = \langle(123)(45)\rangle = \{\varepsilon, (123)(45), (132), (45), (123), (132)(45)\}$. Așa cum $(123) \in H_1$, avem $A = {}^{(123)}A \Leftrightarrow A(x_1^4) = A(x_3, x_1, x_2, x_4)$, care implică

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2. \tag{3.167}$$

Punând $x_1 = x_3 = 0$, și respectiv $x_1 = x_2 = 0$, în (3.167) prim $\alpha_2 = \alpha_3$ și $\alpha_1 = \alpha_3$, adică $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Notând $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, obținem $T = \big((Q, +), \alpha, \alpha, \alpha,\ \alpha_4, c\big)$, adică $A(x_1^4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha_4 x_4 + c$. De asemenea, $(45) \in H_1$, astfel $A(x_1^4) = {}^{(45)}A(x_1^4)$, adică $x_4 = A\big(x_1, x_2, x_3, A(x_1^4)\big) \Leftrightarrow$

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha_4(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha_4 x_4 + c) + c = x_4, \tag{3.168}$$

care (pentru $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$) implică $\alpha_4 c + c = 0$. Utilizând ultima egalitate în (3.6.18) și punând $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, avem $\alpha_4(\alpha(x_3)) = I(\alpha x_3)$, adică $\alpha_4 = I$, prin urmare $T = ((Q, +), \alpha, \alpha, \alpha, I, c)$. Însă $4 - T -$quasigrupul (Q, A) cu așa $T - f$ormă satisface, de exemplu, egalitatea $A(x_1^4) = {}^{(12)}A(x_1^4)$ și $(12) \notin H_1$, prin urmare $H \neq H_1$.

Fie $H = H_2 = \langle(124)(35)\rangle = \{\varepsilon, (124)(35), (1142), (35), (124), (142)(35)\}$Deoarece $(124) \in H$, avem $A(x_1^4) = {}^{(124)}A(x_1^4) \Leftrightarrow A(x_1^4) = A(x_4, x_1, x_3, x_2)$, ce implică

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_1 + \alpha_4 x_2. \tag{3.169}$$

Pentru $x_1 = x_2 = 0$ și respectiv $x_1 = x_4 = 0$, în (3.169), obținem $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4$.

Notând $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha$, avem $T = ((Q, +), \alpha, \alpha, \alpha_3, \alpha, c)$, adică $A(x_1^4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha x_4 + c$, ceea ce implică, în particular, $A(x_1^4) = {}^{(12)}A(x_1^4)$ - o contradicție, deoarece $(12) \notin H_2$, deci $H \neq H_2$.

Fie $H = H_3 = \langle(125)(34)\rangle = \{\varepsilon, (125)(34), (152), (34), (125), (152)(34)\}$. Așa cum $(34) \in H_3$ avem $A(x_1^4) = {}^{(34)}A(x_1^4)$, ceea ce implică $\alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_3 x_4 + \alpha_4 x_3$, astfel (luând $x_4 = 0$) $\alpha_3 = \alpha_4$. Notând $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$ și considerând $(125) \in H_3$, atunci $A(x_1^4) = {}^{(125)}A(x_1^4)$, de unde rezultă $A(x_2, A(x_1^4), x_3, x_4) = x_1$, adică

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c) + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c = x_1, \qquad 3.170)$$

care (pentru $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$) implică $\alpha_2 c + c = 0$. Utilizând ultima egalitate în (3.170) și luând $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, avem $\alpha_2(\alpha x_3) = I(\alpha x_3)$, adică $\alpha_2 = I$.

Deasemenea, pentru $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, egalitatea (3.170) implică

$$\alpha_2^2 x_2 = I(\alpha_1 x_2) \Leftrightarrow x_2 = I(\alpha_1 x_2),$$

adică $\alpha_1 = I$, prin urmare, $T = ((Q,+), I, I, \alpha, \alpha, c)$. În particular, obținem $A(x_1^4) = {}^{(12)}A(x_1^4)$, ceea ce este imposibil, deoarece $(12) \notin H_3$.

Fie $H = H_4 = \langle(134)(25)\rangle = \{\varepsilon, (134)(25), (143), (25), (134), (143)(25)\}$. Pentru $(134) \in H_4$ avem $A(x_1^4) = {}^{(134)}A(x_1^4) \Leftrightarrow A(x_1^4) = A(x_4, x_2, x_1, x_3)$, prin urmare,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_3. \qquad (3.171)$$

Luând $x_1 = x_3 = 0$ și, respectiv $x_1 = x_4 = 0$, în (3.171) rezultă $\alpha_1 = \alpha_4$ și $\alpha_3 = \alpha_4$, atunci

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

Notând $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$, obținem $T-$forma $T = ((Q,+), \alpha, \alpha_2, \alpha, \alpha, c)$, atunci $A(x_1^4) = \alpha x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c$, ce implică, de exemplu, $A(x_1^4) = {}^{(13)}A(x_1^4)$ – o contradicție, deoarece $(13) \notin H_4$, atunci $H \neq H_4$.

Fie $H = H_5 = \langle(135)(24)\rangle = \{\varepsilon, (135)(24), (153), (24), (135), (153)(24)\}$. Din faptul că$(24) \in H_5$ avem $A(x_1^4) = {}^{(24)}A(x_1^4)$, adică $\alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4 = \alpha_2 x_4 + \alpha_4 x_2$, care implică $\alpha_2 = \alpha_4$. Notând $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha$ și considerând $A = {}^{(135)}A \Leftrightarrow A(A(x_1^4), x_2, x_1, x_4) = x_3 \Leftrightarrow$

$$\alpha_1^2 + (\alpha\alpha_1)x_2 + (\alpha_3\alpha_1)x_3 + (\alpha\alpha_1)x_4 + \alpha_1 c + \alpha x_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha x_4 + c = x_3. \qquad (3.172)$$

Luând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ și, respectiv $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, obținem $\alpha_1 = \alpha_3 = I$, atunci $A(x_1^4) = Ix_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + \alpha x_4 + c$, care implică $A(x_1^4) = {}^{(13)}A(x_1^4)$, unde $(13) \notin H_5$.

Fie $H = H_6 = \langle(145)(23)\rangle = \{\varepsilon, (145)(23), (154), (23), (145), (154)(23)\}$. Pentru $(23) \in H$ adică $A(x_1^4) = {}^{(23)}A(x_1^4)$, primim $\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2$, astfel $\alpha_2 = \alpha_3$. Notând $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, reiese $T = ((Q,+), \alpha_1, \alpha, \alpha, \alpha_4, c)$.

Deoarece $(145) \in H_6$, astfel $A = {}^{(145)}A \Leftrightarrow A(A(x_1^4), x_2, x_3, x_1) = x_4 \Leftrightarrow$

$$\alpha_1^2 + (\alpha\alpha_1)x_2 + (\alpha\alpha_1)x_3 + (\alpha_4\alpha_1)x_4 + \alpha_1 c + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha_4 x_4 + c = x_4, \qquad (3.173)$$

care (pentru $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$) implică $\alpha_1 c + c = 0$.

Utilizând ultima egalitate și luând, respectiv, $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ și $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ în (3.173), obținem $\alpha_1 = \alpha_4 = I$, prin urmare, $A(x_1^4) = Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + Ix_4 + c$ ce implică, în particular, $A(x_1^4) = {}^{(14)}A(x_1^4) -$ contradicție, deoarece $(14) \notin H_6$.

$H = H_7 = \langle(234)(15)\rangle = \{\varepsilon, (234)(15), (243), (15), (234), (15)(243)\}$. Din $(234) \in H_7$ reiese $A(x_1^4) = {}^{(234)}A(x_1^4)$, prin urmare,

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_3. \qquad (3.174)$$

Considerând $x_2 = x_3 = 0$ și, respectiv $x_2 = x_4 = 0$, în (3.174), obținem $\alpha_2 = \alpha_4$ și $\alpha_3 = \alpha_4$, deoarece $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

Notând $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$, primim $A(x_1^4) = \alpha_1 x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c$, ce implică, de exemplu, $A(x_1^4) = {}^{(23)}A(x_1^4) -$ contradicție, deoarece $(23) \notin H_7$.

$H = H_8 = \langle(14)(235)\rangle = \{\varepsilon, (14)(235), (253), (14), (235), (14)(253)\}$. Din $(14) \in H_8$, primim $A(x_1^4) = {}^{(14)}A(x_1^4)$, reiese $\alpha_1 x_1 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 + \alpha_4 x_1$, astfel $\alpha_1 = \alpha_4$. Deasemenea $(235) \in H_8 \Rightarrow A(x_1^4) = {}^{(235)}A(x_1^4) \Leftrightarrow A(x_1, A(x_1^4), x_2, x_4) = x_3 \Leftrightarrow$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1) + \alpha_2^2(\alpha_3 x_3) + \alpha_2(\alpha_1 x_4) + \alpha_2 c + \alpha_3 x_2 + \alpha_1 x_4 + c = x_3, \quad (3.175)$$

ce implică $\alpha_2 c + c = 0$. Utilizând ultima egalitate și punând $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ și, respectiv $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, în (3.175) avem $\alpha_2 = \alpha_3 = I$. Notând $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha$ obținem $A(x_1^4) = \alpha x_1 + I x_2 + I x_3 + \alpha x_4 + c$, ce implică, în particular, $A = {}^{(23)}A -$ contradicție, deoarece $(23) \notin H_8$.

Fie $H = H_9 = \langle(13)(245)\rangle = \{\varepsilon, (13)(245), (254), (13), (245), (13)(254)\}$. Deoarece $(13) \in H_9$ avem $A(x_1^4) = {}^{(13)}A(x_1^4)$ ce implică $\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_1$, prin urmare, $\alpha_1 = \alpha_3$. La fel, $(245) \in H_9$, astfel $A(x_1^4) = {}^{(245)}A(x_1^4)$, de unde reiese

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1) + \alpha_2^2 x_2 + \alpha_2(\alpha_1 x_3) + \alpha_2(\alpha_4 x_4) + \alpha_2 c + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_2 + c = x_4, \quad (3.176)$$

ce implică $\alpha_2 c + c = 0$. Acum, utilizând ultima egalitate și punând $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ și, respectiv $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, în (3.176) primim $\alpha_2 = \alpha_4 = I$.

Notând $\alpha_2 = \alpha_4 = I$ obținem $A(x_1^4) = \alpha x_1 + I x_2 + \alpha x_3 + I x_4 + c$, astfel $A = {}^{(24)}A$, ceea ce este o contradicție, deoarece $(24) \notin H_9$.

Fie $H = H_{10} = \langle(12)(345)\rangle = \{\varepsilon, (12)(345), (354), (12), (12)(354), (345)\}$. Din $(12) \in H_{10}$, adică $A(x_1^4) = {}^{(12)}A(x_1^4)$, reiese $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1$, adică $\alpha_1 = \alpha_2$.

Deasemenea $(345) \in H_{10}$, adică $A(x_1^4) = {}^{(345)}A(x_1^4) \Leftrightarrow A(x_1, x_2, A(x_1^4), x_3) = x_4 \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 +$

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_3(\alpha_1 x_1) + \alpha_3(\alpha_2 x_2) + \alpha_3(\alpha_3 x_3) + \alpha_3(\alpha_4 x_4) + \alpha_3 c + \alpha_4 x_3 + c = x_4, \quad (3.177)$$

care (pentru $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$) implică $\alpha_3 c + c = 0$.

Utilizând ultima egalitate și punând $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ și, respectiv $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, în (3.177), obținem $\alpha_3 = \alpha_4 = I$. Notând $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, avem $A(x_1^4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + I x_3 + I x_4 + c$, ce implică în particular $A = {}^{(34)}A$ - contradicție, atunci $H \neq H_{10}$.□

Teorema 3.6.3. *Nu există* $4-T-$*quasigrupuri* (Q, A) *astfel încât* $H \in \{H_{21}, H_{22}, \dots, H_{30}\}$, *unde* $H = \{\sigma \in S_5 |\, A = {}^{\sigma}A\}$.

Demonstrație. În acest caz subgrupul H este generat de două substituții α și β, de ordinul 3 și, respectiv 2, unde β este produsul a două transpoziții independente. Demonstrația teoremei este analogică demonstrației Teoremei 3.6.2. Vom demontra că fiecare egalitate $H = K$, unde $K \in \{ H_{21}, H_{22}, \dots , H_{30}\}$, conduce la o contradicție.

Fie (Q, A) un $4-T-$quasigrup cu $T-$forma $T = ((Q,+), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c)$ și fie $H = \{\sigma \in S_5 |\, A = {}^{\sigma}A\}$.

Dacă $H = H_{21} = \langle (123), (12)(45) \rangle$, atunci $(123) \in H$, adică $A(x_1^4) = {}^{(123)}A(x_1^4)$, astfel $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2$. Luând $x_1 = x_2 = 0$ și respectiv, $x_1 = x_3 = 0$, în egalitatea precedentă, avem $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, prin urmare, $T = ((Q,+), \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_4, c)$ ce implică, în particular, $A(x_1^4) = {}^{(12)}A(x_1^4)$ – contradicție, deoarece $(12) \notin H$.

Fie $H = H_{22} = \langle (124), (12)(35) \rangle$, atunci $(124) \in H$, adică $A(x_1^4) = {}^{(124)}A(x_1^4)$, prin urmare, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_1 + \alpha_4 x_2$. Din ultima egalitate rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4$ și $T = ((Q,+), \alpha_1, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_1, c)$, ce implică $A = {}^{(12)}A$ – o contradicție, deoarece $(12) \notin H$.

Dacă $H = H_{23} = \langle (125), (12)(34) \rangle$, atunci $(123) \in H$, prin urmare, $A(x_1^4) = {}^{(12)(34)}A(x_1^4)$, ce implică $\alpha_1 = \alpha_2$ și $\alpha_3 = \alpha_4$, adică $T = ((Q,+), \alpha_1, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_3, c)$. În particular, obținem $A(x_1^4) = {}^{(12)}A(x_1^4)$ - contradicție, deoarece $(12) \notin H$.

Fie $H = H_{24} = \langle (134), (13)(25) \rangle$. Deoarece $(134) \in H$, avem: $A = {}^{(134)}A$, astfel

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_3.$$

Din egalitatea anterioară rezultă $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4$, adică $T = ((Q,+), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1, c)$ și, în particular, $A(x_1^4) = {}^{(13)}A(x_1^4)$ - contradicție.

Dacă $H = H_{25} = \langle (135), (13)(24) \rangle$, atunci $(13)(24) \in H$, adică $A = {}^{(13)(24)}A$, astfel

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_2,$$

ce implică $\alpha_2 = \alpha_4$ și $\alpha_1 = \alpha_3$, prin urmare, $T = ((Q,+), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, c)$ așa, în particular, $A = {}^{(13)}A$ - contradicție, deoarece $(13) \notin H$.

Fie $H = H_{26} = \langle (145), (14)(23) \rangle$. Fiindcă $(14)(23) \in H$, avem $A = {}^{(13)(24)}A$, astfel $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1$, ce implică $\alpha_1 = \alpha_4$ și $\alpha_2 = \alpha_3$, prin urmare, $T = ((Q,+), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1, c)$ și deoarece $A = {}^{(23)}A$ - contradicție, deoarece $(23) \notin H$.

Fie $H = H_{27} = \langle (234), (15)(23) \rangle$. Fiindcă $(234) \in H$, avem $A = {}^{(234)}A$, astfel

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_3,$$

ce implică $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$, adică $T = ((Q,+),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2,\alpha_2,c)$ și, în particular, $A = {}^{(13)}A$, însă $(13) \notin H$.

Dacă $H = H_{28} = \langle(235),(14)(23)\rangle$, atunci $(14)(23) \in H$, prin urmare, $A = {}^{(14)(23)}A$, ce implică $\alpha_1 = \alpha_4$ și $\alpha_2 = \alpha_3$, adică $T = ((Q,+),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2,\alpha_1,c)$. În particular, primim $A = {}^{(14)}A$ - contradicție, deoarece $(14) \notin H$.

Dacă $H = H_{29} = \langle(245),(13)(24)\rangle$, atunci $(13)(24) \in H$, prin urmare, $A = {}^{(13)(24)}A$, ce implică $\alpha_1 = \alpha_3$ și $\alpha_2 = \alpha_4$, adică $T = ((Q,+),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2,c)$. În particular, avem $A = {}^{(13)}A$ ceea ce este imposibil, deoarece $(13) \notin H$.

Fie $H = H_{30} = \langle(345),(12)(34)\rangle$, atunci $(12)(34) \in H$, prin urmare, $A = {}^{(12)(34)}A$, ce implică $\alpha_1 = \alpha_2$ și $\alpha_3 = \alpha_4$, adică $T = ((Q,+),\alpha_1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2,c)$. În particular, obținem $A = {}^{(12)}A$ - contradicție, deoarece $(12) \notin H$.□

Exemplul 3.6.1. $4-T-$quasigrupul $(\mathbb{Z}_5, A)$, unde $A(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4$ are exact 20 de parastrofi distincți. În acest caz $H = \{\sigma \in S_5 |\, A = {}^{\sigma}A\} = H_{12} = \langle(124),(12)\rangle$. Setul maximal de parastrofi distincți este determinată de orice set de reprezentanți ai claselor de resturi ale grupului S_5 în raport cu subgrupul H, de exemplu,

1. $A(x_1^4) = x_1 + x_2 + x_3 + \bar{2}x_4$;
2. ${}^{(14)}A(x_1^4) = x_1 + x_2 + \bar{2}x_3 + x_4$;
3. ${}^{(24)}A(x_1^4) = x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 + x_4$;
4. ${}^{(34)}A(x_1^4) = \bar{2}x_1 + x_2 + x_3 + x_4$;
5. ${}^{(15)}A(x_1^4) = x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{3}x_4$;
6. ${}^{(25)}A(x_1^4) = x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{4}x_4$;
7. ${}^{(35)}A(x_1^4) = x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{4}x_4$;
8. ${}^{(45)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{3}x_4$;
9. ${}^{(145)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{4}x_4$;
10. ${}^{(14)(25)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2 + x_3 + \bar{3}x_4$;
11. ${}^{(15)(24)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{3}x_3 + x_4$;
12. ${}^{(15)(34)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + \bar{3}x_2 + x_3 + \bar{4}x_4$;
13. ${}^{(14)(35)}A(x_1^4) = \bar{4}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{4}x_3 + x_4$;
14. ${}^{(154)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + x_2 + \bar{4}x_3 + \bar{4}x_4$;
15. ${}^{(245)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{4}x_2 + x_3 + 4x_4$;
16. ${}^{(24)(35)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{4}x_3 + x_4$;
17. ${}^{(254)}A(x_1^4) = \bar{3}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{2}x_4$;
18. ${}^{(25)(34)}A(x_1^4) = \bar{2}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{2}x_4$;
19. ${}^{(345)}A(x_1^4) = \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{3}x_3 + \bar{2}x_4$;
20. ${}^{(354)}A(x_1^4) = \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{3}x_4$.

Corolarul 3.6.2. *Există* $4-T-$*quasigrupuri cu exact 20 de parastrofi distincți de orice ordin impar* $q > 1$, *unde* $(q,3) = 1$.

3.7. Concluzii la Capitolul 3

Capitolul trei se referă la T −quasigrupurile 4-are cu un număr exact dat de parastrofi distincți.

Sunt date condiții necesare și suficiente ca un T −quasigrup 4-ar să aibă numărul maximal dat (atins) de parastrofi distincți egal cu 1, 5, 10 sau 20. De asemenea, se demonstrează că nu există T −quasigrupuri $4-$are cu numărul exact dat de parastrofi distincți k, unde $k \in \{2, 6, 15\}$.

Sunt prezentate următoarele estimări ale spectrului 4-T-quasigrupurilor finite cu numărul exact de parastrofi distincți d, unde $d \in \{1, 5, 10, 20\}$:

- ✓ Există $4 - \mathrm{TS} - \mathrm{T}$ −quasigrupuri de orice ordin $\mathrm{q} \in \mathbb{N}, \mathrm{q} \geq 2$.
- ✓ Există $4 - \mathrm{T}$ −quasigrupuri cu exact 5 parastrofi distincți pentru orice ordin $\mathrm{q}, \mathrm{q} \geq 3$.
- ✓ Pentru orice ordin impar $\mathrm{q}, \mathrm{q} \geq 3$ există $4 - T$ −quasigrupuri cu exact 10 parastrofi distincți.
- ✓ Există $4 - \mathrm{T}$ −quasigrupuri cu exact 20 de parastrofi distincți de orice ordin impar $\mathrm{q} > 1$, unde $(\mathrm{q}, 3) = 1$.

4. QUASIGRUPURI TOTAL PARASTROFIC-ORTOGONALE

Quasigrupurile $n-$are în care seturile maximale de parastrofi distincți formează sisteme ortogonale se numesc quasigrupuri *total parastrofic-ortogonale.* O noțiune analogică a apărut inițial în caz binar, fiind introdusă de autoarea tezei, în colaborare cu G. Belyavskaya, unde quasigrupurile binare cu toți cei 6 parastrofi ortogonali au fost numite *totCO-quasigrupuri (total conjugate-orthogonal quasigroups)* [18]. Quasigrupurile ternare mediale parastrofic-ortogonale au fost studiate de I. Fryz și F. Sokhatsky [59], care au stabilit condiții necesare și suficiente ca un quasigrup ternar medial să posede sisteme ortogonale, respectiv puternic ortogonale din șase (toți) parastrofi principali, și au demonstrat că, pentru orice $n > 3$, nu există quasigrupuri $n-$are mulțimea parastrofilor principali ai cărora formează un sistem puternic ortogonal.

În primele trei paragrafe ale acestui capitol sunt studiate quasigrupurile binare, ternare și 4-are total parastrofic-ortogonale, iar în ultimul paragraf sunt date metode de construcție a quasigrupurilor $n-$are parastrofic-ortogonale.

4.1. Quasigrupuri binare total parastrofic-ortogonale

Definiția 4.1.1. *Quasigrupul binar în care toți cei șase parastrofi formează un sistem ortogonal se numește totCO-quasigrup.*

Urmând [9], pentru reprezentarea elementelor grupului simetric S_3 vom utiliza notațiile: 1 – substituția identică, $r = (23)$, $l = (13)$, $s = (12)$. Dacă parastrofii ${}^{\alpha}A$ și ${}^{\beta}A$ ai unui quasigrup binar (Q, A) sunt ortogonali, atunci vom mai nota $\alpha \perp \beta$. Observăm că $s = rlr = lrl$ și că $\alpha \perp \beta$ implică $r\alpha \perp r\beta$, deci obținem:

$$r \perp rl \Rightarrow 1 \perp l, \qquad s \perp lr,\ l \perp lr \Rightarrow 1 \perp r, \qquad s \perp rl,\ 1 \perp s \Rightarrow r \perp lr, \qquad l \perp r.$$

Utilizând implicațiile de mai sus, obținem condiții necesare și suficiente ca un $T-$quasigrup binar să fie un $totCO - T-$quasigrup.

Propoziția 4.1.1. *$T-$quasigrupul binar (Q, A), unde $A(x, y) = \varphi x + \psi y + c, c \in Q$, este un $totCO-$quasigrup dacă și numai dacă aplicațiile $\varphi + \varepsilon$, $\varphi - \varepsilon$, $\psi + \varepsilon$, $\psi - \varepsilon$, $\varphi^2 + \psi$, $\psi^2 + \varphi$, $\varphi - \psi$, $\varphi + \psi$, $\psi\varphi - \varepsilon$ sunt bijecții.*

Demonstrație. Orice doi parastrofi ai unui $totCO-$quasigrup sunt ortogonali, deci avem: $1 \perp l$ sau $s \perp lr \Longrightarrow \varphi + \varepsilon \in S_Q$; $r \perp rl \Longrightarrow \varphi + \varepsilon \in S_Q$ și $\varphi - \varepsilon \in S_Q$, $1 \perp r$ sau $s \perp rl \Longrightarrow \psi + \varepsilon \in S_Q$, $l \perp lr \Longrightarrow \psi + \varepsilon \in S_Q$ și $\psi - \varepsilon \in S_Q$, $1 \perp lr$ sau $s \perp l \Longrightarrow \varphi + \psi^2 \in S_Q, 1 \perp rl$ sau $s \perp r \Longrightarrow \varphi^2 + \psi \in S_Q$, $r \perp lr$ sau $rl \perp l \Longrightarrow \varphi - \psi \in S_Q, 1 \perp s \Longrightarrow \varphi - \psi \in S_Q$ și $\varphi + \psi \in S_Q$, $(\perp r$ sau $lr \perp rl \Longrightarrow \psi\varphi - \varepsilon \in S_Q$. □

Observăm că, dacă mulțimea de parastrofi distincți ai $T-$quasigrupului (Q, A): $A(x, y) =$

$\varphi x + \psi y$ este ortogonală, atunci mulțimea de parastrofi distincți ai $T-$quasigrupului (Q,B): $B(x,y) = \varphi x + \psi y + c$ cu $c \neq 0$ la fel este ortogonală.

Corolarul 4.1.1. *$T-$quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$, $A(x,y) = \bar{a}x + \bar{b}y$, este un $totCO-$quasigrup dacă și numai dacă numerele $a+1, a-1, b+1, b-1, a^2+b, b^2+a, a-b, a+b, ab-1$ sunt reciproc prime cu n.*

Demonstrație. Într-adevăr, în acest caz aplicațiile $\varphi+\varepsilon$, $\varphi-\varepsilon$, $\psi+\varepsilon$, $\psi-\varepsilon$, $\varphi^2+\psi$, $\psi^2+\varphi$, $\varphi-\psi$, $\varphi+\psi$, $\psi\varphi-\varepsilon$ iau forma:

$$\varphi+\varepsilon\colon (\varphi+\varepsilon)x = (L_a+\varepsilon)x = (a+1)x;$$
$$(\varphi-\varepsilon)\colon (\varphi-\varepsilon)x = (L_a-\varepsilon)x = (a-1)x;$$
$$(\psi+\varepsilon)\colon (\psi+\varepsilon)x = (L_b+\varepsilon)x = (b+1)x;$$
$$(\psi-\varepsilon)\colon (\psi-\varepsilon)x = (L_b-\varepsilon)x = (b-1)x;$$
$$(\varphi^2+\psi)\colon (\varphi^2+\psi)x = (L_a^2+L_b)x = (a^2+b)x;$$
$$(\psi^2+\varphi)\colon (\psi^2+\varphi)x = (L_b^2+L_a)x = (b^2+a)x;$$
$$(\varphi-\psi)\colon (\varphi-\psi)x = (L_a-L_b)x = (a-b)x;$$
$$(\varphi+\psi)\colon (\varphi+\psi)x = (L_a+L_b)x = (a+b)x;$$
$$(\psi\varphi-\varepsilon)\colon (\psi\varphi-\varepsilon)x = (L_bL_a-\varepsilon)x = (ab-1)x,$$

deci sunt bijecții dacă și numai dacă elementele ce le corespund sunt reciproc prime în raport cu n. Menționăm că, în acest caz numerele a și b la fel sunt reciproc prime cu n, deoarece (Q,A) este un quasigrup. □

În baza corolarului de mai sus se obțin condițiile necesare și suficiente ca quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$, $A(x,y) = \bar{a}x + \bar{b}y$, să fie un $totCO-$quasigrup.

Corolarul 4.1.2. *Dacă $T-$quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$, $A(x,y) = \bar{a}x + \bar{b}y$, este un $totCO-$quasigrup, atunci $a \not\equiv -1, 1, b, -b, -b^2$; $b \not\equiv -1, 1, -a^2$, $ab \not\equiv 1 \ (mod\, n)$.*

Aceste condiții exclud cazul în care elementele sunt congruente cu 0 modulo n. În caz contrar, aplicațiile $\bar{1} \to \bar{a}$ și $\bar{1} \to \bar{b}$ nu sunt bijective.

Teorema 4.1.1. *Pentru orice număr întreg $n \geq 11$, ce este reciproc prim cu 2, 3, 5 și 7, există $totCO-$quasigrupuri de ordinul n.*

Demonstrație. Considerăm quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$, $A(x,y) = \bar{2}x + \bar{5}y$, unde $(2,n) = 1$ și $(5,n) = 1$. Luând în considerare condițiile din Corolarul 4.1.2., pentru quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$ avem: $(a+1)x = 3x$, $(a-1)x = x$, $(b+1)x = 6x$, $(b-1)x = 4x$, $(a^2+b)x = 9x$, $(b^2+a)x = 27x$, $(a-b)x = -3x$, $(a+b)x = 7x$, $(ab-1)x = 9x$. Deoarece $n \geq 11$, aplicațiile $3x$, $4x$, $6x$, $-3x$, $7x$, $9x$, $27x$ sunt reciproc prime cu n, deci n este reciproc prim cu 2, 3 și 7. Observăm că, dacă $(3,n) = 1$ atunci $(-3,n) = (n-3,n) = 1$. Fie că n este reciproc prim cu 2, 3, 5 și 7, atunci $n \neq 27$ și $n < 27$, doar dacă $n = 11, 13, 17, 19, 23$. Toate aceste ordine sunt numere prime, astfel $(27,n) = 1$ pentru oricare dintre ele. Dacă $n > 27$ atunci, deoarece n este reciproc prim cu 3, obținem $(27,n) = 1$. Astfel, din Corolarul 4.1.2 rezultă că quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$, $A(x,y) = \bar{2}x + \bar{5}y$, este un $totCO-$quasigrup pentru orice n reciproc prim cu 2, 3, 5 și 7. □

Corolarul 4.1.3. *Există $totCO-$quasigrupuri de orice ordin $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, unde p_i este număr prim, $p_i \neq 2,3,5,7$, $k_i \geq 1$, $i = 1,2,\dots,s$, $s \geq 1$.*

Pe lângă quasigrupul utilizat în demonstrația Teoremei 4.1.1, există și alte quasigrupuri cu proporietăți similare.

Propoziția 4.1.2. *Considerăm quasigrupurile $(\mathbb{Z}_n, A_i)$, $i = 1, 2, \dots, 8$, unde:*

$$A_1(x,y) = \bar{2}x + \bar{4}y,\ A_2(x,y) = \bar{3}x + \bar{5}y,\ A_3(x,y) = \bar{2}x + \bar{3}y,\ A_4(x,y) = \bar{2}x + \bar{8}y,$$
$$A_5(x,y) = \bar{5}x + \overline{10}y,\ A_6(x,y) = \bar{5}x + \overline{11}y,\ A_7(x,y) = \bar{3}x + \bar{7}y,\ A_8(x,y) = \bar{3}x + \bar{9}y.$$

Sunt adevărate afirmațiile:

1) Quasigrupurile $(\mathbb{Z}_n, A_1)$ și $(\mathbb{Z}_n, A_2)$, sunt $totCO-$quasigrupuri dacă și numai dacă n este reciproc prim cu fiecare dintre numerele 2, 3, 5 și 7;

2) Quasigrupurile $(\mathbb{Z}_n, A_i)$ și $i = 3, 4, 5, 6$, unde sunt $totCO-$quasigrupuri dacă și numai dacă n este reciproc prim cu fiecare dintre numerele 2, 3, 5, 7 și 11;

3) Quasigrupurile $(\mathbb{Z}_n, A_7)$ și $(\mathbb{Z}_n, A_8)$, unde sunt $totCO-$quasigrupuri dacă și numai dacă n este reciproc prim cu fiecare dintre numerele 2, 3, 5, 7 și 11.

Demonstrație. Demonstrația propoziției are la bază relațiile prezentate în Corolarul 4.1.2. În plus, observăm că printre numerele din Corolarul 4.1.2 cel mai mare număr este $b^2 + a$ pentru toate aceste quasigrupuri. Acest număr este $m_1 = 18$ (respectiv, $m_2 = 28$, $m_3 = 11$, $m_4 = 66$, $m_5 = 105$, $m_6 = 126$, $m_7 = 52$, $m_8 = 84$) pentru quasigrupurile A_1 (respectiv, pentru quasigrupurile A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8). Însă, dacă n este reciproc prim cu 2, 3, 5, 7, atunci primul număr compus este $n = 121$ și $(126,121) = (5,121) = 1$. Celelalte numere m sunt mai mici decât n. Numărul $b^2 + a$ în fiecare dintre quasigrupurile considerate este reciproc prim cu $2, 3, 5, 7$ pentru quasigrupurile A_1 și A_2, reciproc prim cu numerele 2, 3, 5, 7, 11 pentru quasigrupurile A_3, A_4, A_5, A_6 și, respectiv, reciproc prim cu 2, 3, 5, 7, 13 pentru quasigrupurile A_7, A_8. □

Exemplul 4.1.1. Quasigrupurile $(\mathbb{Z}_{11}, \mathrm{A}_1), (\mathbb{Z}_{13}, \mathrm{A}_2), (\mathbb{Z}_{17}, \mathrm{A}_3), (\mathbb{Z}_{17}, \mathrm{A}_4), (\mathbb{Z}_{17}, \mathrm{A}_5), (\mathbb{Z}_{19}, \mathrm{A}_6)$, unde $A_1(x,y) = \bar{3}x + \bar{9}y$, $A_2(x,y) = \bar{6}x + \bar{8}y$, $A_3(x,y) = \bar{6}x + \overline{12}y$, $A_4(x,y) = \bar{7}x + \overline{11}y$,

$A_5(x,y) = \bar{8}x + \overline{10}y$, $A_6(x,y) = \bar{9}x + \overline{11}y$, sunt totCO $-$quasigrupuri idempotente.

Pentru a arăta că aceste quasigrupuri sunt $totCO$-quasigrupuri idempotente este suficient de verificat condițiile prezentate în Corolarul 4.1.2, precum și relația de idempotență (adică fiecare dintre aceste quasigrupuri satisface relația $A(x,x) = x$).

Pentru quasigrupul $(\mathbb{Z}_{11}, \mathrm{A}_1)$: $\mathrm{A}_1(x,y) = \bar{3}x + \bar{9}y$, avem $\bar{a} = \bar{3}, \bar{b} = \bar{9}$. Prin urmare, $-b \equiv 2, -b^2 \equiv 7, -a^2 \equiv 2, ab \equiv 5\ (mod\ 11)$. Astfel, acest quasigrup satisfice condițiile Corolarului 4.1.2, deci $(\mathbb{Z}_{11}, \mathrm{A}_1)$ este un $totCO$ $-$quasigrup. Deoarece

$$A(x,x) = \bar{3}x + \bar{9}x = \overline{12}x = \bar{x},$$

quasigrupul $(\mathbb{Z}_{11}, \mathrm{A}_1)$ este un $totCO$ $-$quasigrup idempotent. Analogic se arată că și celelalte quasigrupuri sunt $totCO$ $-$quasigrupuri idempotente. □

Exemplul 4.1.2. Quasigrupul $(\mathbb{Z}_{17}, \mathrm{A})$, unde $A(x,y) = \bar{2}x + \bar{4}y$ este un $totCO$ $-$quasigrup și are următoarea mulțime de parastrofi distincți:

$$A(x,y) = \bar{2}x + \bar{4}y,\ {}^{s}A(x,y) = \bar{4}x + \bar{2}y\ ,\quad {}^{r}A(x,y) = \bar{8}x + \overline{13}y,$$
$${}^{rl}A(x,y) = \overline{13}x + \bar{8}y\ ,\ {}^{l}A(x,y) = \bar{9}x + \overline{15}y\ , {}^{lr}A(x,y) = \overline{15}x + \bar{9}y\ .$$

Pentru a arăta că mulțimea respectivă formează un sistem ortogonal este suficient de observat că orice doi parastrofi sunt ortogonali. În acest caz avem $a^2 \equiv 4, b^2 \equiv 16,\ ab \equiv 8\ (mod\ 17)$ și sunt satisfăcute condițiile Corolarului 4.1.2. Deci, cei șase parastrofi formează un sistem ortogonal.

Propoziția 4.1.3. *Orice parastrof al unui $totCO$ $-$quasigrup este la fel un $totCO$ $-$quasigrup.*

Demonstrație. Într-adevăr, fie (Q, A) un $totCO$ $-$quasigrup. Atunci sistemul $\bar{\Sigma}(A) = \{A,\ {}^{l}A,\ {}^{r}A, {}^{lr}A, {}^{rl}A,\ {}^{s}A\}$ este ortogonal. Fie acum $(Q,\ {}^{\sigma}A)$ un parastrof al $totCO$ $-$quasigrupului (Q, A), unde $\sigma \in S_3 \setminus \{\varepsilon\}$. Construim sistemul de parastrofi:

$$\bar{\Sigma}({}^{\sigma}A) = \left\{{}^{\sigma}A,\ {}^{l}({}^{\sigma}A),\ {}^{r}({}^{\sigma}A), {}^{lr}({}^{\sigma}A), {}^{rl}({}^{\sigma}A)\right\}.$$

Fixăm un anumit σ în S_3, de exemplu $\sigma = l$. Ținând cont de asociativitatea operației de compunere a funcțiilor și de relațiile

$$ll = 1, lrl = s, rll = r, sl = lrll = lr,$$

obținem

$$\bar{\Sigma}(\ {}^{l}A) = \left\{\ {}^{l}A,\ {}^{l}(\ {}^{l}A),\ {}^{r}(\ {}^{l}A), {}^{lr}(\ {}^{l}A), {}^{rl}(\ {}^{l}A),\ {}^{s}(\ {}^{l}A)\right\} = \bar{\Sigma}(A).$$

Astfel parastroful $(Q,\ {}^{l}A)$ la fel este un $totCO$ $-$quasigrup. În mod analog procedăm pentru celelalte valori ale lui σ. □

4.2. Quasigrupuri ternare total parastrofic-ortogonale

Fie (Q, A) un quasigrup ternar. Sistemul format din trei parastrofi ai acestui quasigrup $\left\{ {}^{\alpha}A,\ {}^{\beta}A,\ {}^{\gamma}A \right\}$ este ortogonal dacă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} {}^{\alpha}A(x_1, x_2, x_3) = a, \\ {}^{\beta}A(x_1, x_2, x_3) = b, \\ {}^{\gamma}A(x_1, x_2, x_3) = c, \end{cases}$$

are soluție unică în Q, pentru orice $a, b, c \in Q$.

O mulțime de parastrofi distincți ai unui quasigrup ternar se numește sistem ortogonal dacă orice trei parastrofi din această mulțime sunt ortogonali.

Quasigrupurile ternare cu seturi maximale ortogonale din trei parastrofi distincți

Quasigrupurile ternare cu trei parastrofi distincți ortogonali sunt studiate în lucrările [59, 105, 121]. În [80] McLeish studiază quasigrupurile ternare cu exact 3 trei parastrofi distincți și indică seturile de identități ce trebuie să fie satisfăcute de acest quasigrup. În acest caz, seturile de identități utilizate de către McLeish definesc subgrupurile grupului S_4, izomorfe grupului diedral D_8. Analizând seturile de identități descrise de către McLeish, conchidem că dacă un quasigrup ternar are exact trei parastrofi distincți, atunci unul dintre aceste triplete este $\left\{A, {}^{(123)}A, {}^{(132)}A\right\}$. Conform definiției ortogonalității operațiilor ternare, cei trei parastrofi distincți sunt și ortogonali dacă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} A(x_1, x_2, x_3) = a, \\ {}^{(123)}A(x_1, x_2, x_3) = b, \\ {}^{(132)}A(x_1, x_2, x_3) = c, \end{cases}$$

are soluție unică, pentru orice $a, b, c \in Q$.

Teorema 4.2.1. *Un T −quasigrup ternar(Q, A), cu T −grupul $(Q, +)$, are exact trei parastrofi distincți, ce sunt și ortogonali, dacă și numai dacă operația $A(x_1, x_2, x_3)$ are una dintre următoarele forme:*

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + I x_3 + c, I x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c, \alpha x_1 + I x_2 + \alpha x_3 + c,$$

unde $Ix = -x,\ \alpha \neq I, 2\alpha \neq \varepsilon,\ \alpha^2 = \varepsilon,\ \alpha c = Ic,\ \alpha \in\ Aut\ (Q, +),\ c \in Q$.

Demonstrație. Forma operației unui T −quasigrup ternar cu exact trei parastrofi distincți a fost stabilită în Propoziția 2.3.2, unde se arată că un T −quasigrup ternar are exact trei parastrofi distincți dacă și numai dacă forma operației este una din cele trei indicate în enunțul teoremei, unde $Ix = -x,\ \alpha \neq I,\ \alpha^2 = \varepsilon,\ \alpha c = Ic,\ \alpha \in\ Aut\ (Q, +),\ c \in Q, \forall x \in Q$. Rămâne de arătat că, dacă $2\alpha \neq \varepsilon$, atunci cei trei parastrofi distincți sunt și ortogonali.

Fie $A(x_1,x_2,x_3)=\alpha x_1+\alpha x_2+Ix_3+c$, atunci ${}^{(123)}A(x_1,x_2,x_3)=\alpha x_1+Ix_2+\alpha x_3+c$ și ${}^{(132)}A(x_1,x_2,x_3)=Ix_1+\alpha x_2+\alpha x_3+c$. Prin urmare,

$$\perp\left\{A,{}^{(123)}A,{}^{(132)}A\right\}:\quad \begin{vmatrix}\alpha & \alpha & I\\ \alpha & I & \alpha\\ I & \alpha & \alpha\end{vmatrix}=I(2\alpha+I)(\alpha+\varepsilon)^2.$$

Deoarece cei trei parastrofi sunt distincți, rezultă că $\alpha\neq I$. Prin urmare, $\alpha+\varepsilon$ este un automorfism al grupului $(Q,+)$. Deci, cei trei parastrofi distincți sunt și ortogonali, doar dacă $2\alpha+I$ este un automorfism al grupului abelian $(Q,+)$, adică doar dacă $2\alpha\neq\varepsilon$.
Analog procedăm și pentru celelalte două operații, sistemul de parastrofi distincți fiind același, și făcând abstracție de ordinea parastrofilor. □

Corolarul 4.2.1. *Fie $(\mathbb{Z}_n,A)$ un T-quasigrup ternar cu T-grupul $(\mathbb{Z}_n,+)$. Atunci $(\mathbb{Z}_n,A)$ are exact trei parastrofi distincți, ce sunt și ortogonali, dacă și numai dacă operația $A(x_1,x_2,x_3)$ are una dintre următoarele forme: $\bar{a}x_1+\bar{a}x_2+\overline{n-1}x_3+\bar{c},\bar{a}x_1+\overline{n-1}x_2+\bar{a}x_3+\bar{c}$ sau $\overline{n-1}x_1+\bar{a}x_2+\bar{a}x_3+\bar{c}$, unde $(a,n)=1$, $(a,n-1)=1,(2a-1,n)=1$ $a^2\equiv 1\ (mod\ n)$, $\bar{a},\bar{c}\in\mathbb{Z}_n$.*

Demonstrația corolarului rezultă direct din demonstrația Teoremei 4.2.1, acest quasigrup fiind un $T-$quasigrup ternar.

Corolarul 4.2.2. *Există quasigrupuri ternare finite, cu exact trei parastrofi distincți ce sunt și ortogonali, de orice ordin impar $q\geq 3$.*

Demonstrație. Considerăm quasigrupul ternar $(\mathbb{Z}_q,A),A(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2-x_3$, unde q este număr impar și $q\geq 3$. Quasigrupul $(\mathbb{Z}_q,A)$ are exact trei parastrofi distincți deoarece:

$$A={}^{(34)}A={}^{(1324)}A={}^{(1423)}A={}^{(12)(34)}A={}^{(13)(24)}A={}^{(14)(23)}A={}^{(12)}A=x_1+x_2-x_3,$$
$${}^{(123)}A={}^{(13)}A={}^{(24)}A={}^{(124)}A={}^{(143)}A={}^{(234)}A={}^{((1234)}A={}^{(1432)}A=-x_1+x_2+x_3,$$
$${}^{(132)}A={}^{(23)}A={}^{(14)}A={}^{(142)}A={}^{(134)}A={}^{(243)}A={}^{(1243)}A={}^{(1342)}A=x_1-x_2+x_3.$$

Observăm că

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}\equiv 4\ (mod\ q),$$

este un element inversabil în inelul $\mathbb{Z}_q$ pentru orice q impar, $q\geq 3$. Prin urmare, sistemul de parastrofi distincți ai quasigrupului $(\mathbb{Z}_q,A)$ este ortogonal. □

Corolarul 4.2.3. *Fie $(\mathbb{R},+,\cdot)$ câmpul numerelor reale și $(\mathbb{R},A)$ un quasigrup ternar liniar peste*

$\mathbb{R}$. *Atunci* $(\mathbb{R}, A)$ *este un quasigrup ternar idempotent cu exact trei parastrofi distincți ce sunt și ortogonali dacă și numai dacă operația* $A(x_1,\ x_2,\ x_3)$ *are una dintre formele:*

$$x_1 + x_2 - x_3,\ \ x_1 - x_2 + x_3 \ \ sau \ \ -x_1 + x_2 + x_3.$$

Demonstrație. Considerăm operația $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3$. Mulțimea de parastrofi distincți ai acestui quasigrup este:

$$A(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3,$$

$$^{(12)}A(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + x_3,$$

$$^{(23)}A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3.$$

Observăm că,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Conform regulii lui Cramer, sistemul de ecuații liniare, dat mai sus, este compatibil determinat pe mulțimea numerelor reale. Deci, cei trei parastrofi distincți formează un sistem ortogonal. □

Operația utilizată pentru demonstrarea Corolarului 4.2.3 asigură existența quasigrupurilor ternare infinite cu exact trei parastrofi distincți ce sunt și ortogonali. Astfel, are loc următoarea afirmație.

Corolarul 4.2.4. *Există quasigrupuri ternare infinite cu exact trei parastrofi distincți ce sunt și ortogonali.*

Quasigrupuri ternare cu un maximum atins din patru parastrofi distincți și ortogonali

În paragraful 2.3 au fost studiate T-quasigrupurile ternare cu exact 4 parastrofi distincți, fiind indicate seturile de identități ce asigură proprietatea dată. De asemenea, este analizată forma operației T-quasigrupului ternar, ce posedă exact 4 parastrofi distincți.

Observăm că în acest caz un set de patru parastrofi distincți ai unui quasigrup ternar este:

$$\left\{A,\ ^{(12)(34)}A,\ ^{(13)(24)}A,\ ^{(14)(23)}A\right\}.$$

În Teorema 2.3.1 se demonstrează că un $T-$quasigrup ternar (Q, A), cu $T-$grupul $(Q, +)$, are exact patru parastrofi distincți dacă și numai dacă operația A are una din formele: $A_1(x_1,\ x_2, x_3) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3, A_2(x_1,\ x_2,\ x_3) = Ix_1 + \alpha x_2 + Ix_3,\ A_3(x_1,\ x_2,\ x_3) = Ix_1 + Ix_2 + \alpha x_3,\ A_4(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + Ix_2 + Ix_3$, unde $\alpha \in\ Aut\ Q(+)\ Ix = -x,\ \alpha \neq I.$

Teorema 4.2.2. *Un* $T-$ *quasigrup ternar* (Q, A), *cu* $T-$ *grupul* $(Q, +)$, *cu exact patru parastrofi distincți, este total parastrofic-ortogonal dacă și numai dacă* $\alpha + \varepsilon,\ \varepsilon + 2I\alpha \in AutQ(+),$ *unde* $\alpha \in\ Aut\ Q(+),\ Ix = -x,\ \alpha \neq I.$

Demonstrație. Fie (Q, A) un $T-$quasigrup ternar cu $T-$grupul (Q, +). Dacă operația A are forma $A(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3$, unde $\alpha \in Aut\ Q(+)$, $Ix = -x$, $\alpha \neq I$, atunci au loc egalitățile:

$$A = {}^{(12)}A = {}^{(13)}A = {}^{(23)}A = {}^{(123)}A = {}^{(132)}A = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3,$$

$${}^{(14)(23)}A = {}^{(14)}A = {}^{(124)}A = {}^{(134)}A = {}^{(1234)}A = {}^{(1324)}A = \alpha^{-1}x_1 + Ix_2 + Ix_3,$$

$${}^{(13)(24)}A = {}^{(24)}A = {}^{(142)}A = {}^{(243)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(1342)}A = Ix_1 + \alpha^{-1}x_2 + Ix_3,$$

$${}^{(12)(34)}A = {}^{(34)}A = {}^{(234)}A = {}^{(243)}A = {}^{(1243)}A = {}^{(1432)}A = Ix_1 + Ix_2 + \alpha^{-1}x_3.$$

Quasigrupul (Q, A) este total parastrofic-ortogonal dacă oricare trei din cei patru parastrofi distincți ai săi sunt ortogonali. Rezolvând sistemele de ecuații respective (prin metoda lui Cramer), obținem:

$$\perp \{A, {}^{(14)(23)}A, {}^{(13)(24)}A\}: \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^{-1} & I & I \\ I & \alpha^{-1} & I \end{vmatrix} = \alpha^{-1}(\varepsilon + \alpha)^2;$$

$$\perp \{A, {}^{(14)(23)}A, {}^{(12)(34)}A\}: \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^{-1} & \mathrm{I} & I \\ I & I & \alpha^{-1} \end{vmatrix} = I\alpha^{-1}(\varepsilon + \alpha)^2;$$

$$\perp \{A, {}^{(13)(24)}A, {}^{(12)(34)}A\}: \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \mathrm{I} & \alpha^{-1} & \mathrm{I} \\ I & I & \alpha^{-1} \end{vmatrix} = \alpha^{-1}(\varepsilon + \alpha)^2;$$

$$\perp \{{}^{(14)(23)}A, {}^{(13)(24)}A, {}^{(12)(34)}A\}: \begin{vmatrix} \alpha^{-1} & I & I \\ \mathrm{I} & \alpha^{-1} & I \\ I & I & \alpha^{-1} \end{vmatrix} = I\alpha^{-3}(2\alpha + I)(\varepsilon \ + \alpha)^2;$$

Astfel, toți cei patru parastrofi distinți formează un sistem ortogonal, dacă și numai dacă $2\alpha + I \in Aut\ (Q, +)$.□

Conform Corolarului 2.3.2, T-quasigrupul ternar $(\mathbb{Z}_n, \mathrm{A})$, cu T-grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$, are exact patru parastrofi distincți dacă și numai dacă operația A are una din formele:

$$A_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{a}x_1 + \bar{a}x_2 + \bar{a}x_3,$$

$$A_2(x_1, x_2, x_3) = \overline{n-1}x_1 + \bar{a}x_2 + \overline{n-1}x_3,$$

$$A_3(x_1, x_2, x_3) = \overline{n-1}x_1 + \overline{n-1}x_2 + \bar{a}x_3,$$

$$A_4(x_1, x_2, x_3) = \bar{a}x_1 + \overline{n-1}x_2 + \overline{n-1}x_3,$$

unde $(a, n) = 1, a \neq n - 1$. În continuare aflăm condițiile necesare și suficiente ca $(\mathbb{Z}_n, \mathrm{A_i}), \mathrm{i} = \overline{1, 4}$, să fie total parastrofic-ortogonal.

Corolarul 4.2.5. *Seturile maximale de parastrofi distincți ale quasiigrupului* $(\mathbb{Z}_n, \mathrm{A_i}), \mathrm{i} = \overline{1, 4}$, *catacterizat în Corolarul 2.3.2, sunt ortogonale dacă și numai dacă* $(2a - 1, n) = 1$.

Demonstrație. Într-adevăr, mulțimea de parastrofi distincți ai quasigrupului $(\mathbb{Z}_n, A_1)$, are mulțimea de parastrofi

$$A = {}^{(12)}A = {}^{(13)}A = {}^{(23)}A = {}^{(123)}A = {}^{(132)}A = \bar{a}x_1 + \bar{a}x_2 + \bar{a}x_3,$$
$${}^{(14)}A = {}^{(124)}A = {}^{(14)(23)}A = {}^{(134)}A = {}^{(1234)}A = {}^{(1324)}A = \bar{a}^{-1}x_1 - x_2 - x_3,$$
$${}^{(24)}A = {}^{(142)}A = {}^{(243)}A = {}^{(13)(24)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(1342)}A = -x_1 + \bar{a}^{-1}x_2 - x_3,$$
$${}^{(34)}A = {}^{(12)(34)}A = {}^{(234)}A = {}^{(243)}A = {}^{(1243)}A = {}^{(1432)}A = -x_1 - x_2 + \bar{a}^{-1}x_3.$$

Cei patru parastrofi sunt distincți doar dacă $a \neq n - 1$. Rezolvând sistemele prin regula lui Cramer, obținem:

$$\perp \{A, {}^{(14)}A, {}^{(24)}A\}: \begin{vmatrix} a & a & a \\ a^{-1} & -1 & -1 \\ -1 & a^{-1} & -1 \end{vmatrix} = a^{-1}(1+a)^2;$$
$$\perp \{A, {}^{(14)}A, {}^{(34)}A\}: \begin{vmatrix} a & a & a \\ a^{-1} & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a^{-1} \end{vmatrix} = -a^{-1}(1+a)^2;$$
$$\perp \{A, {}^{(24)}A, {}^{(34)}A\}: \begin{vmatrix} a & a & a \\ -1 & a^{-1} & -1 \\ -1 & -1 & a^{-1} \end{vmatrix} = a^{-1}(1+a)^2;$$
$$\perp \{{}^{(14)}A, {}^{(24)}A, {}^{(34)}A\}: \begin{vmatrix} a^{-1} & -1 & -1 \\ -1 & a^{-1} & -1 \\ -1 & -1 & a^{-1} \end{vmatrix} = -a^{-3}(2a-1)(1+a)^2;$$

Sistemul de parastrofi este ortogonal, dacă și numai dacă $(2a - 1, n) = 1$.□

Următorul corolar furnizează unele informații cu privire la spectrul quasigrupurilor ternare cu exact 4 parastrofi distincți ce sunt și ortogonali.

Corolarul 4.2.6. *Există quasigrupuri ternare finite de orice ordin impar $q \geq 3$ ce au exact 4 parastrofi distincți ce sunt și ortogonali.*

Demonstrație. Într-adevăr, considerăm quasigrupul $(\mathbb{Z}_q, A)$, unde $A(x_1, x_2, x_3 = x_1 + x_2 + x_3$, $(q, 2) = 1$. Cei 24 de parastrofi distincți se împart în patru clase de parastrofi egali între ei:

$$A = {}^{(12)}A = {}^{(13)}A = {}^{(23)}A = {}^{(123)}A = {}^{(132)}A = x_1 + x_2 + x_3,$$
$${}^{(14)}A = {}^{(124)}A = {}^{(14)(23)}A = {}^{(134)}A = {}^{(1234)}A = {}^{(1324)}A = x_1 - x_2 - x_3,$$
$${}^{(24)}A = {}^{(142)}A = {}^{(243)}A = {}^{(13)(24)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(1342)}A = -x_1 + x_2 - x_3,$$
$${}^{(34)}A = {}^{(12)(34)}A = {}^{(234)}A = {}^{(243)}A = {}^{(1243)}A = {}^{(1432)}A = -x_1 - x_2 + x_3.$$

Pentru a arăta că acest sistem de parastrofi distinți definește o mulțime de parastrofi ortogonali, este suficient de arăta că orice triplet de parastrofi este ortogonal.

$$\perp \{A, {}^{(14)}A, {}^{(24)}A\}: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \equiv 4 \ (mod\ q);$$
$$\perp \{A, {}^{(14)}A, {}^{(34)}A\}: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \equiv -4 \ (mod\ q);$$

$$\perp \{A, {}^{(24)}A, {}^{(34)}A\}: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 4 \ (mod\ q);$$

$$\perp \{{}^{(14)}A, {}^{(24)}A, {}^{(34)}A\}: \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \equiv -4 (mod\ q).$$

Deoarece $(q, 2) = 1,$ clasele de resturi $\bar{4}$ și -$\bar{4}$ sunt inversabile pentru $\forall q \geq 3.$ Deci, sistemul de parastrofi distincți este ortogonal. □

Observăm că, pe lângă operația utilizată în demonstrația corolarului, există și alte operații ternare de quasigrup mulțimea de parastrofi ai cărora are exact patru parastrofi distincți ce sunt și ortogonali. De exemplu, quasigrupurile $(\mathbb{Z}_5, A_1),$ $A_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3$ și $(\mathbb{Z}_9, A_2),$ $A_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{4}x_3$ au la fel exact câte patru parastrofi distincți ce sunt și ortogonali. Într-adevăr, mulțimea parastrofilor distincți ai quasigrupului $(\mathbb{Z}_5, A_1)$ este

$$A = {}^{(12)}A = {}^{(13)}A = {}^{(23)}A = {}^{(123)}A = {}^{(132)}A = \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3,$$

$${}^{(14)}A = {}^{(124)}A = {}^{(14)(23)}A = {}^{(134)}A = {}^{(1234)}A = {}^{(1324)}A = \bar{3}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{4}x_3,$$

$${}^{(24)}A = {}^{(142)}A = {}^{(243)}A = {}^{(13)(24)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(1342)}A = \bar{4}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{4}x_3,$$

$${}^{(34)}A = {}^{(12)(34)}A = {}^{(234)}A = {}^{(243)}A = {}^{(1243)}A = {}^{(1432)}A = \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{3}x_3.$$

În acest caz $a \equiv 2 \ (mod\ 5)$ și $2a - 1 \equiv 3 \ (mod\ 5)$, prin urmare condițiile prezentate în Corolarul 4.2.5 sunt satisfăcute, iar mulțimea parastrofilor distincți este ortogonală.

Analog obținem și pentru quasigrupul $(\mathbb{Z}_9, A_2)$ ce are mulțimea parastrofilor distincți

$$A = {}^{(12)}A = {}^{(13)}A = {}^{(23)}A = {}^{(123)}A = {}^{(132)}A = \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{4}x_3,$$

$${}^{(14)}A = {}^{(124)}A = {}^{(14)(23)}A = {}^{(134)}A = {}^{(1234)}A = {}^{(1324)}A = \bar{7}x_1 + \bar{5}x_2 + \bar{5}x_3,$$

$${}^{(24)}A = {}^{(142)}A = {}^{(243)}A = {}^{(13)(24)}A = {}^{(1423)}A = {}^{(1342)}A = \bar{5}x_1 + \bar{7}x_2 + \bar{5}x_3,$$

$${}^{(34)}A = {}^{(12)(34)}A = {}^{(234)}A = {}^{(243)}A = {}^{(1243)}A = {}^{(1432)}A = \bar{5}x_1 + \bar{5}x_2 + \bar{7}x_3.$$

4.3. T −quasigrupuri 4 −are cu exact cinci parastrofi distincți și ortogonali

Conform Propoziției 3.3.1, un $4 - T$ −quasigrup are exact cinci parastrofi distincți dacă și numai dacă T −forma sa este una dintre următoarele:

$$T_1 = \big((Q, +), \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, c\big), \qquad T_2 = (Q, +), I, I, I, \alpha, c), \qquad T_3 = ((Q, +), I, I, \alpha, I, c),$$

$$T_4 = ((Q, +), I, \alpha, I, I, c), \quad T_5 = ((Q, +), \alpha, I, I, I, c),$$

unde $\alpha \neq I,$ $Ix = -x.$ În acest paragraf vom cerceta ortogonalitatea celor cinci parastrofi distincți ai $4 - T$ −quasigrupului cu T −forma $T_1.$

Teorema 4.3.1. T −*quasigrupul* 4 −*ar (Q, A) cu T-forma* $\big((Q, +), \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, c\big),$ *cu exact cinci* *parastrofi distincți, este total parastrofic-ortogonal dacă și numai dacă* $\alpha + \varepsilon \in Aut(Q, +)$.

Demonstrație. Fie că $4 - T$ −quasigrupul (Q, A) are exact cinci parastrofi distincți și T −forma sa este T_1. Atunci, conform Corolarului 3.3.1, mulțimea parastrofilor distincți ai acestui T −quasigrup este

$$A(x_1^4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + c,$$
$$^{(15)}A(x_1^4) = \alpha^{-1} x_1 + I x_2 + I x_3 + I x_4 + I\alpha^{-1} c,$$
$$^{(25)}A(x_1^4) = I x_1 + \alpha^{-1} x_2 + I x_3 + I x_4 + I\alpha^{-1} c,$$
$$^{(35)}A(x_1^4) = I x_1 + I x_2 + \alpha^{-1} x_3 + I x_4 + I\alpha^{-1} c,$$
$$^{(45)}A(x_1^4) = I x_1 + I x_2 + I x_3 + \alpha^{-1} x_4 + I\alpha^{-1} c.$$

Conform definiției quasigrupurilor total parastrofic-ortogonale, orice patru parastrofi distincți ai sistemului $\left\{A, {}^{(15)}A, {}^{(25)}A, {}^{(35)}A, {}^{(45)}A\right\}$ sunt ortogonali.

Pentru a stabili în ce condiții mulțimea parastrofilor distincți ai T −quasigrupului este ortogonală este suficient de aplicat regula lui Cramer de rezolvare a sistemelor de ecuații.

$$\perp \left\{A, {}^{(15)}A, {}^{(25)}A, {}^{(35)}A\right\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^{-1} & I & I & I \\ I & \alpha^{-1} & I & I \\ I & I & \alpha^{-1} & I \end{vmatrix} = I\alpha^{-2}(\alpha + \varepsilon)^3 \text{ −este o bijecție.}$$

Reieșind din faptul că $\alpha \in Aut(Q, +)$, obținem că $I\alpha^{-2} \in Aut(Q, +)$. Prin urmare, cei patru parastrofi sunt ortogonali dacă și numai dacă $\alpha + \varepsilon \in Aut(Q, +)$. În mod analog obținem condițiile necesare și suficiente pentru celelalte seturi din patru parastrofi distincți:

$$\perp \left\{A, {}^{(15)}A, {}^{(25)}A, {}^{(45)}A\right\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^{-1} & I & I & I \\ I & \alpha^{-1} & I & I \\ I & I & I & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^{-2}(\alpha + \varepsilon)^3 \text{ este bijectivă;}$$

$$\perp \left\{A, {}^{(15)}A, {}^{(35)}A, {}^{(45)}A\right\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^{-1} & I & I & I \\ I & I & \alpha^{-1} & I \\ I & I & I & \alpha \end{vmatrix} = I\alpha^{-2}(\alpha + \varepsilon)^3 \text{ este bijectivă;}$$

$$\perp \left\{A, {}^{(25)}A, {}^{(35)}A, {}^{(45)}A\right\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ I & \alpha^{-1} & I & I \\ I & I & \alpha^{-1} & I \\ I & I & I & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^{-2}(\alpha + \varepsilon)^3 \text{ este bijectivă;}$$

$$\perp \left\{{}^{(15)}A, {}^{(25)}A, {}^{(35)}A, {}^{(45)}A\right\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha^{-1} & I & I & I \\ I & \alpha^{-1} & I & I \\ I & I & \alpha^{-1} & I \\ I & I & I & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^{-2}(\alpha + \varepsilon)^3 \text{ este bijectivă.}$$

Astfel, toate cele cinci seturi din câte patru parastrofi distincți sunt ortogonale, dacă și numai dacă $\alpha + \varepsilon$ este un automorfism al grupului abelian $(Q, +)$. □

Corolarul 4.3.1. T *−quasigrupul 4-ar cu* T *−forma* $((\mathbb{Z}_n, +), \bar{a}, \bar{a}, \bar{a}, \bar{a}, \bar{c}\,)$, *unde* $(a, n) = 1$ *și*

$(a+1,n)=1$, *are exact 5 parastrofi distincți ce sunt și ortogonali.*

Demonstrația Corolarului rezultă direct din demonstrația Teoremei 4.3.1, deoarece $T-$quasigrupul $4-$ar cu T $-$ forma $((\mathbb{Z}_n,+),\bar{a},\bar{a},\bar{a},\bar{a},\bar{c})$, reprezintă unul dintre cazurile particulare ale quasigrupului dat în Teorema 4.3.1, iar condițiile prezentate în corolar sunt echivalente condițiilor date în teoremă, cu ajustare la inelul claselor de resturi. □

Corolarul 4.3.2. *Există T-quasigrupuri 4-are finite, cu exact 5 parastrofi distincți și ortogonali, de orice ordin* $q\geq 3$.

Demonstrație. Considerăm $4-T-$quasigrupul (Q,A), $A(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_2+x_3+x_4$. Atunci, mulțimea parastrofilor distincți este:

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_2+x_3+x_4,$$
$$^{(15)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1-x_2-x_3-x_4,$$
$$^{(25)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=-x_1+x_2-x_3-x_4,$$
$$^{(35)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=-x_1-x_2+x_3-x_4,$$
$$^{(45)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=-x_1-x_2-x_3+x_4.$$

Deoarece $1\equiv -1\ (mod\ q)$ doar pentru $q=2$, conform Teoremei 4.3.1, obținem că pentru $\forall q\geq 3$, cei cinci parastrofi distincți sunt și ortogonali. □

4.4. Metode de construcție a quasigrupurilor $n-$are parastrofic-ortogonale

În baza metodei de construcție a sistemelor ortogonale de operații $n-$are prin utilizarea superpozițiilor, date de Trevor Evans, în acest paragraf sunt prezentate construcții ale operațiilor $n-$are parastrofic-ortogonale, în particular auto-ortogonale $k-$are, unde k are una din următoarele forme: $k=n^2,2^n,p^n$, iar p este un număr prim impar.

Construcția quasigrupurilor $n^2-$are auto-ortogonale

Propoziția 4.4.1. *Fie* (Q,A) *un quasigrup* $n-$*ar auto-ortogonal și fie* $\{{}^{\alpha_1}A,{}^{\alpha_2}A,\dots,{}^{\alpha_n}A\}$ *un sistem ortogonal de parastrofi principali ai quasigrupului* (Q,A). *Grupoidul* n^2-*ar* (Q,B_1), *unde*

$$B_1\left(x_1^{n^2}\right)={}^{\alpha_1}A\left({}^{\alpha_1}A(x_1^n),{}^{\alpha_1}A(x_{n+1}^{2n}),\dots,{}^{\alpha_1}A\left(x_{n(n-1)+1}^{n^2}\right)\right)$$

este un quasigrup auto-ortogonal.

Demonstrație. Considerăm operațiile $n^2-$are definite în felul următor:

$$\begin{cases} B_1(x_1^{n^2}) = {}^{\alpha_1}A\left({}^{\alpha_1}A(x_1^n), {}^{\alpha_1}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(x_{n(n-1)+1}^{n^2}\right)\right), \\ B_2(x_1^{n^2}) = {}^{\alpha_2}A\left({}^{\alpha_1}A(x_1^n), {}^{\alpha_1}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(x_{n(n-1)+1}^{n^2}\right)\right), \\ \dots\dots\dots \\ B_n(x_1^{n^2}) = {}^{\alpha_n}A\left({}^{\alpha_1}A(x_1^n), {}^{\alpha_1}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(x_{n(n-1)+1}^{n^2}\right)\right), \\ B_{n+1}(x_1^{n^2}) = {}^{\alpha_1}A\left({}^{\alpha_2}A(x_1^n), {}^{\alpha_2}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_2}A\left(x_{n(n-1)+1}^{n^2}\right)\right), \\ \dots\dots\dots \\ B_{n(n-1)+1}(x_1^{n^2}) = {}^{\alpha_1}A\left({}^{\alpha_n}A(x_1^n), {}^{\alpha_n}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_n}A\left(x_{n(n-1)+1}^{n^2}\right)\right), \\ B_{n(n-1)+2}(x_1^{n^2}) = {}^{\alpha_2}A\left({}^{\alpha_n}A(x_1^n), {}^{\alpha_n}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_n}A\left(x_{n(n-1)+1}^{n^2}\right)\right), \\ \dots\dots\dots \\ B_{n^2}(x_1^{n^2}) = {}^{\alpha_2}n\left({}^{\alpha_n}A(x_1^n), {}^{\alpha_n}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_n}A\left(x_{n(n-1)+1}^{n^2}\right)\right) \end{cases}$$

Operațiile $B_i,\ i = \overline{1, n^2}$ sunt parastrofi principali ai quasigrupului (Q, B_1). Într-adevăr, în expresia ${}^{\alpha_k}A({}^{\alpha_s}A(x_1^n),\ {}^{\alpha_s}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_s}A(x_{n(n-1)+1}^{n^2}))$, notăm

$$y_1 = {}^{\alpha_s}A(x_1^n), y_2 = {}^{\alpha_s}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, \qquad y_n = {}^{\alpha_s}A(x_{n(n-1)+1}^{n^2})$$

obținând ${}^{\alpha_k}A(y_1, y_2, \dots, y_n) = A(y_{\alpha_k^{-1}(1)}, y_{\alpha_k^{-1}(2)}, \dots, y_{\alpha_k^{-1}(n)})$. Observăm că,

$$y_m = {}^{\alpha_s}A(x_{n(m-1)+1}^{mn}) = {}^{\alpha_s}A(z_1, z_2, \dots, z_n) = A(z_{\alpha_s^{-1}(1)}, z_{\alpha_s^{-1}(2)}, \qquad \dots, z_{\alpha_s^{-1}(n)}),$$

unde $z_1 = x_{n(m-1)+1},\ z_2 = x_{n(m-1)+2}, \dots,\ z_n = x_{mn}$. Prin urmare,

$${}^{\alpha_s}({}^{\alpha_s}A(x_1^n), {}^{\alpha_s}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_s}A(x_{n(n-1)+1}^{n^2})) = A(A(u_1^n), A(u_{n+1}^{2n}), \dots, A(u_{n(n-1)+1}^{n^2}).$$

Notăm $D(x_1^{n^2}) = A(A(x_1^n), A(x_{n+1}^{2n}), \dots, A(x_{n(m-1)+1}^{n^2})$. Conform celor expuse mai sus, fiecare dintre operațiile $B_1, B_2, \dots, B_{n^2}$ este un parastrof al quasigrupului $D(x_1^{n^2})$. Deoarece relația de parastrofie este tranzitivă, obținem că $B_i,\ i = \overline{1, n^2}$ este un parastrof principal al quasigrupului $(Q,\ B_1)$. Arătăm că sistemul $\{B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_{n^2}\}$ este ortogonal. Deoarece Q este o mulțime finită, este suficient să arătăm că soluția sistemului de ecuații $B_i(x_1^{n^2}) = a_i,\ i = \overline{1, n^2}$, este unică. Fie $\{B_i(x_1^{n^2}) = B_i(y_1^{n^2})\},\ i = \overline{1, n^2}$, atunci

$$\begin{cases} {}^{\alpha_1}A({}^{\alpha_1}A(x_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A(x_{n(n-1)+1}^{n^2})) = {}^{\alpha_1}A({}^{\alpha_1}A(y_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A(y_{n(n-1)+1}^{n^2})), \\ {}^{\alpha_2}A({}^{\alpha_1}A(x_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A(x_{n(n-1)+1}^{n^2})) = {}^{\alpha_2}A({}^{\alpha_1}A(y_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A(y_{n(n-1)+1}^{n^2})), \\ \dots\dots\dots \\ {}^{\alpha_n}A({}^{\alpha_1}A(x_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A(x_{n(n-1)+1}^{n^2})) = {}^{\alpha_n}A({}^{\alpha_1}A(y_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A(y_{n(n-1)+1}^{n^2})), \\ {}^{\alpha_1}A({}^{\alpha_2}A(x_1^n), \dots, {}^{\alpha_2}A(x_{n(n-1)+1}^{n^2})) = {}^{\alpha_1}A\left({}^{\alpha_2}A(y_1^n), \dots, {}^{\alpha_2}A\left(y_{n(n-1)+1}^{n^2}\right)\right), \\ \dots\dots\dots \\ {}^{\alpha_n}A({}^{\alpha_n}A(x_1^n), \dots, {}^{\alpha_n}A(x_{n(n-1)+1}^{n^2})) = {}^{\alpha_n}A\left({}^{\alpha_n}A(y_1^n), \dots, {}^{\alpha_n}A\left(y_{n(n-1)+1}^{n^2}\right)\right). \end{cases}$$

Utilizând faptul că sistemul de parastrofi $\{{}^{\alpha_1}A,\ \dots,\ {}^{\alpha_n}A\}$ este ortogonal, obținem

$$\begin{cases} {}^{\alpha_1}A(x_1^n) = {}^{\alpha_1}A(y_1^n), \\ \ldots\ldots\ldots \\ {}^{\alpha_n}A(x_1^n) = {}^{\alpha_n}A(y_1^n), \\ \ldots\ldots\ldots \\ {}^{\alpha_1}A\left(x_{n(n-1)+1}^{n^2}\right) = {}^{\alpha_1}A\left(y_{n(n-1)+1}^{n^2}\right), \\ \ldots\ldots\ldots \\ {}^{\alpha_n}A\left(x_{n(n-1)+1}^{n^2}\right) = {}^{\alpha_n}A\left(y_{n(n-1)+1}^{n^2}\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = y_n, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n(n-1)+1} = y_{n(n-1)+1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n^2} = y_{n^2}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Deoarece sistemul de ecuații (4.1) are soluție unică, sistemul de parastrofi $\{B_1,\ B_2,\ \ldots, B_{n^2}\}$ este ortogonal. Astfel obtinem că, $(Q,\ B_1)$ este quasigrup n^2 −ar auto-ortogonal. □

Corolarul 4.4.1. *Dacă există quasigrupuri n −are auto-ortogonale de ordinul q, atunci există quasigrupuri auto-ortognale n^2 −are de ordinul q.*

Deoarece există quasigrupuri binare auto-ortogonale de orice ordin $q \neq 2, 3$ și 6, rezultă că există quasigrupuri 4 −are auto-ortogonale de orice ordin $n \neq 2,\ 3,\ 6$.

Corolarul 4.4.2. *Există quasigrupuri 2^n -are auto-ortognale de orice ordin q, unde $q \in \mathbb{N}^*\backslash\{1, 2, 3, 6\}$.*

Exemplul 4.4.1. Fie $(\mathbb{Z}_p, A)$, unde p este prim impar și $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$ un quasigrup ternar auto-ortogonal, având ortogonali parastrofii principali $A, {}^{(13)}A$ și ${}^{(23)}A$. Conform propoziției 1, quasigrupul 9-ar $(\mathbb{Z}_p, B_1)$, unde $B_1 = A(A(x_1^3),\ A(x_4^6),\ A(x_7^9))$ este auto-ortogonal având ortogonali parastrofii $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7,\ B_8,\ B_9$, unde

$$B_2(x_1^9) = {}^{(13)}A\big(A(x_1^3), A(x_4^6), A(x_7^9)\big) = {}^{(17)(28)(39)}B(x_1^9);$$

$$B_3(x_1^9) = {}^{(23)}A(A(x_1^3), A(x_4^6), A(x_7^9)) = {}^{(47)(58)(69)}B_1(x_1^9);$$

$$B_4(x_1^9) = A({}^{(13)}A(x_1^3), {}^{(13)}A(x_4^6), {}^{(13)}A(x_7^9)) = {}^{(13)(46)(79)}B_1(x_1^9);$$

$$B_5(x_1^9) = {}^{(13)}A({}^{(13)}A(x_1^3), {}^{(13)}A(x_4^6), {}^{(13)}A(x_7^9)) = {}^{(19)(28)(37)(46)}B_1(x_1^9);$$

$$B_6(x_1^9) = {}^{(23)}A({}^{(13)}A(x_1^3), {}^{(13)}A(x_4^6), {}^{(13)}A(x_7^9)) = {}^{(13)(49)(58)(67)}B_1(x_1^9);$$

$$B_7(x_1^9) = A\left({}^{(23)}A(x_1^3), {}^{(23)}A(x_4^6), {}^{(23)}A(x_7^9)\right) = {}^{(23)(56)(89)}B_1(x_1^9);$$

$$B_8(x_1^9) = {}^{(13)}A({}^{(23)}A(x_1^3), {}^{(23)}A(x_4^6), {}^{(23)}A(x_7^9)) = {}^{(17)(29)(38)(56)}B\_1(x_1^9);$$

$$B_9(x_1^9) = {}^{(23)}A({}^{(23)}A(x_1^3), {}^{(23)}A(x_4^6), {}^{(23)}A(x_7^9)) = {}^{(23)(47)(68)}B_1(x_1^9).$$

Observație. *Conform Propoziției 4.4.1, din exemplul precedent, rezultă că există quasigrupuri 3^n −are de orice ordin prim impar p.*

O construcție a quasigrupurilor mn −are auto-ortogonale

Tehnicile de construcție a quasigrupurilor $n-$are auto-ortogonale se bazează metoda superpozițiilor, utilizată de către T. Evans.

Propoziția 4.4.2. [58] *Fie* $\{A_1, A_2\}$ *este o pereche de quasigrupuri ortogonale, definite pe una și aceeași mulțime Q și fie* $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ *și* $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ *seturi ortogonale de quasigrupuri* m *−are definite în Q. Atunci* $\{D_{i,j} \mid i = 1,2;\ j = 1,2, \dots, m\}$, *unde*

$$D_{i,j}\,(x_1, \dots, x_{2m}) = A_i\left(B_j(x_1, \dots, x_m), C_j(x_{m+1}, \dots, x_{2m})\right),$$

este un sistem ortogonal de quasigrupuri $2m$ *−are quasigroups în* Q.

Corolarul 4.4.3. *Există quasigrupuri auto-*ortogonale *2n-are de orice ordin prim* $p, p \geq 5$, *unde* $n + 1 \not\equiv 0\ (mod\ p)$.

Corolarul 4.4.4. *Fie Q o mulțime finită, (Q, A) un quasigrup ternar auto-ortogonal și (Q, B) un quasigrup n-ar. Dacă mulțimile* $\{{}^{\alpha_1}A,\ {}^{\alpha_2}A, {}^{\alpha_3}A\}$ *și* $\{{}^{\beta_1}B, {}^{\beta_2}B, \dots, {}^{\beta_n}B\}$ *sunt sisteme ortogonale de parastrofi principali, atunci operațiile* $D_1,\ D_2,\ \dots,\ D_{3n}$, *unde*

$$\begin{cases} D_1(x_1^{3n}) = {}^{\beta_1}B\left({}^{\alpha_1}A(x_1^3), {}^{\alpha_1}A(x_4^6), \dots, {}^{\alpha_1}A(x_{3n-2}^{3n})\right), \\ D_2(x_1^{3n}) = {}^{\beta_2}B\left({}^{\alpha_1}A(x_1^3), {}^{\alpha_1}A(x_4^6), \dots, {}^{\alpha_1}A(x_{3n-2}^{3n})\right), \\ \dots\dots\dots \\ D_n(x_1^{3n}) = {}^{\beta_n}B\left({}^{\alpha_1}A(x_1^3), {}^{\alpha_1}A(x_4^6), \dots, {}^{\alpha_1}A(x_{3n-2}^{3n})\right), \\ \dots\dots\dots \\ D_{3n}(x_1^{3n}) = {}^{\beta_n}B\left({}^{\alpha_n}A(x_1^3), {}^{\alpha_n}A(x_4^6), \dots, {}^{\alpha_n}A(x_{3n-2}^{3n})\right) \end{cases}$$

formează un sistem ortogonal de parastrofi principali ai unui quasigrup $3n$*-ar, definit pe mulțimea finită Q.*

Teorema 4.4.1. [58] *Fie* $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ *un sistem ortogonal de quasigrupuri* n *−are și fie* $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ *un sistem ortogonal de quasigrupuri* m *−are, ambele sisteme fiind definite pe mulțimea Q. Atunci sistemul* $\{C_{ij} \mid i = 1,2, \dots, n;\ j = 1,2, \dots, m\}$, *unde*

$$C_{i,j}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = A_i\left(x_1, \dots, x_{n-1}, B_j(y_1, \dots, y_m)\right),$$

$\forall x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m \in Q$, *este un sistem ortogonal ce conține* $m \cdot n^{m-1}$ *quasigrupuri* $n + m - 1$, *definite în mulțimea* Q.

Corolarul 4.4.5. *Există sisteme ortogonale* s *−are quasigrupuri de ordinul* q, *pentru orice* $s \geq 3$ *și orice* $q > 2, q \neq 6$.

Teorema 4.4.2. *Fie* (Q, A) *și* (Q, B) *două quasigrupuri finite auto-ortogonale, de aritate* n *și, respectiv,* m. *Dacă* $\{{}^{\alpha_1}A, {}^{\alpha_2}A, \dots . {}^{\alpha_n}A\}$ *și* $\left\{{}^{\beta_1}B,\ {}^{\beta_2}B, \dots, {}^{\beta_m}B\right\}$ *sunt sisteme ortogonale de* *parastrofi principali ai quasigrurilor* (Q, A) *și* (Q, B), *atunci grupoidul* (Q, C_1), *unde*

$$C_1(x_1^{mn}) = {}^{\beta_1}B({}^{\alpha_1}A(x_1^n), \dots, \quad {}^{\alpha_1}A(x_{n(m-1)+1}^{mn}))$$

este un quasigrup auto-ortogonal nm*-ar.*

Demonstrație. Considerăm operațiile mn −are definite în felul următor:

$$\begin{cases} C_1(x_1^{mn}) = {}^{\beta_1}B\left({}^{\alpha_1}A(x_1^n), {}^{\alpha_1}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(x_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right), \\ C_2(x_1^{mn}) = {}^{\beta_2}B\left({}^{\alpha_1}A(x_1^n), {}^{\alpha_1}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(x_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right), \\ \dots\dots\dots \\ C_m(x_1^{mn}) = {}^{\beta_m}B\left({}^{\alpha_1}A(x_1^n), {}^{\alpha_1}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(x_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right), \\ \dots\dots\dots \\ C_{n(m-1)+1}(x_1^{mn}) = {}^{\beta_1}B\left({}^{\alpha_n}A(x_1^n), {}^{\alpha_n}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_n}A\left(x_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right), \\ \dots\dots\dots \\ C_{mn}(x_1^{mn}) = {}^{\beta_n}B\left({}^{\alpha_n}A(x_1^n), {}^{\alpha_n}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_n}A\left(x_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right), \end{cases}$$

Arătăm că sistemul $\{C_1, C_2, \dots, C_{mn}\}$ este ortogonal. Deoarece Q este o mulțime finită, este suficient să arătăm că soluția sistemului de ecuații

$$\{C_i(x_1^{mn}) = c_i\}, i = \overline{1, mn} \tag{4.2}$$

este unică. Fie $\{C_i(x_1^{mn}) = C_i(y_1^{mn})\}$, $i = \overline{1, mn}$, deci

$$\begin{cases} {}^{\beta_1}B\left({}^{\alpha_1}A(x_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(x_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right) = {}^{\beta_1}B\left({}^{\alpha_1}A(y_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(y_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right), \\ {}^{\beta_2}B\left({}^{\alpha_1}A(x_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(x_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right) = {}^{\beta_2}B\left({}^{\alpha_1}A(y_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(xy_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right), \\ \dots\dots\dots \\ {}^{\beta_m}B\left({}^{\alpha_1}A(x_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(x_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right) = {}^{\beta_m}B\left({}^{\alpha_1}A(y_1^n), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(y_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right), \\ \dots\dots\dots \\ {}^{\beta_1}B\left({}^{\alpha_n}A(x_1^n), \dots, {}^{\alpha_n}A\left(x_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right) = {}^{\beta_1}B\left({}^{\alpha_n}A(y_1^n), \dots, {}^{\alpha_n}A\left(y_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right), \\ \dots\dots\dots \\ {}^{\beta_n}B\left({}^{\alpha_n}A(x_1^n), \dots, {}^{\alpha_n}A\left(x_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right) = {}^{\beta_n}B\left({}^{\alpha_n}A(y_1^n), \dots, {}^{\alpha_n}A\left(y_{n(m-1)+1}^{mn}\right)\right). \end{cases}$$

Așa cum sistemul de parastrofi $\{{}^{\beta_1}B, \dots, {}^{\beta_m}B\}$ este ortogonal, obținem

$$\begin{cases} {}^{\alpha_1}A(x_1^n) = {}^{\alpha_1}A(y_1^n), \\ \dots\dots\dots \\ {}^{\alpha_n}A(x_1^n) = {}^{\alpha_n}A(y_1^n), \\ \dots\dots\dots \\ {}^{\alpha_1}A(x_{n(m-1)+1}^{mn}) = {}^{\alpha_1}A(y_{n(m-1)+1}^{mn}), \\ \dots\dots\dots \\ {}^{\alpha_n}A(x_{n(m-1)+1}^{mn}) = {}^{\alpha_n}A\left(y_{n(m-1)+1}^{mn}\right). \end{cases}$$

Din ortogonalitatea sistemului de parastrofi ${}^{\alpha_i}A$, $i = \overline{1, n}$, rezultă $x_i = y_i$, $i = \overline{1, mn}$. Deoarece sistemul de ecuații (4.2) are soluție unică, sistemul de operații $\{C_1, C_2, \dots, C_{mn}\}$ este ortogonal.

Utilizând definiția parastrofului, obținem că operațiile $\{C_1, C_2, \dots, C_{mn}\}$ sunt parastrofi ai operației C_1, unde

$$C_1(x_1^{mn}) = {}^{\beta_1}B({}^{\alpha_1}A(x_1^n), \dots, \quad {}^{\alpha_1}A(x_{n(m-1)+1}^{mn})).$$

Prin urmare, (Q, C_1) este quasigrup mn −ar auto-ortogonal. □

Corolarul 4.4.6. *Dacă pe o mulțime finită Q există quasigrupuri auto-*ortogonale m *−are și* n *−are* $(n,\ m \geq\ 2)$, *atunci pe această mulțime există quasigrupuri* mn *−are auto-ortogonale.*

Corolarul 4.4.7. *Dacă există quasigrupuri n-are auto-ortogonale de ordinul* q, *atunci există quasigrupuri auto-ortogonale* n^k *−are de ordinul* q, *unde* $k \geq 2$.

Corolarul 4.4.8 *Există quasigrupuri* 2^k *-are auto-ortogonale de orice ordinul* $q \neq 1, 2, 3, 6$ *și orice* $k \geq 1$.

Exemplul 4.4.2. Mulțimea tuturor parastrofilor principali ai quasigrupului n −ar $(\mathbb{Z}_q, A)$, unde

$$A(x_1^n) = \bar{2}x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

este

$$A, {}^{(12)}A, \dots, {}^{(1n)}A,$$

unde

$${}^{(1i)}A(x_1^n) = \sum_{j=1}^{i-1} x_j + \bar{2}x_i + \sum_{j=i+1}^{n} x_j\,, i = \overline{2, n-1}\,.$$

Pentru a arăta că mulțimea de parastrofi distincți este ortogonală este suficient de aflat:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} \equiv n + 1\ (mod\ q).$$

Astfel, sistemul parastrofilor principali este și ortogonal dacă și numai dacă

$$n + 1\ \not\equiv 0\ (mod\ q).$$

Prin urmare, există quasigrupuri n −are auto-ortogonale de orice ordin prim impar $q \geq\ 3$, pentru orice $n \geq 2$ astfel încât $n + 1\ \not\equiv 0\ (mod\ q)$.

Corolarul 4.4.9. *Există quasigrupuri auto-*ortogonale p^k*-are de ordinul* p *pentru orice* p *− prim, impar și orice* $k \in \mathbb{N}^*$.

4.5. Concluzii la Capitolul 4

Capitolul patru se referă la quasigrupurile $n-$are parastrofic-ortogonale, inclusiv la $T-$quasigrupurile total parastrofic-ortogonale $k-$are, unde $k = 2, 3, 4$.

În acest compartiment sunt obținute caracterizări ale quasigrupurilor binare în care toți cei șase parastrofi formează un sistem ortogonal, numite $totCO-$quasigrupuri. În particular se arată că clasa $totCO-$quasigrupurilor este închisă în raport cu transformarea de parastrofie și imaginile omomorfice, sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T-$quasigrup binar să fie un $totCO-$quasigrup. Sunt prezentate estimări ale spectrului $totCO-$quasigrupurilor: se arată că nu există $totCO-$quasigrupuri binare de ordin mai mic ca 7, însă există astfel de quasigrupuri de orice ordin q, reciproc prim cu 2, 3, 5 și 7.

În paragraful 4.2 sunt studiate T-quasigrupurile ternare total-parastrofic-ortogonale. Sunt date condiții necesare și suficiente ca un T-quasigrup ternar să posede exact k parastrofi distincți ce sunt și ortogonali, pentru fiecare $k \in \{3, 4\}$. Sunt construite exemple de quasigrupuri ternare cu exact 3, respectiv cu exact 4, parastrofi distincti care sunt și ortogonali și sunt prezentate următoarele estimări ale spectrului quasigrupurilor ternare total parastrofic-ortogonale:

- ✓ Există quasigrupuri ternare finite de ordinul q, cu exact trei parastrofi distincți ce sunt și ortogonali, de orice ordin impar $q \geq 3$;
- ✓ Există quasigrupuri ternare finite de orice ordin impar $q \geq 3$, ce au exact 4 parastrofi distincți ce sunt și ortogonali;

În paragraful 4.3 sunt studiate $4-T-$quasigrupurile total-parastrofic-ortogonale cu exact cinci parastrofi distincți. Sunt date condiții necesare și suficiente ca un $4-T-$quasigrup să posede exact 5 parastrofi distincți ce sunt și ortogonali. Se arată că există quasigrupuri $4-$are cu exact 5 parastrofi distincți și ortogonali de orice ordin $q \geq 3$.

În baza metodei de construcție a sistemelor ortogonale de operații $n-$are, date de Trevor Evans, în ultimul paragraf sunt prezentate construcții ale operațiilor $n-$are parastrofic-ortogonale, în particular auto-ortogonale $k-$are, unde $k = n^2, 2^n, mn$, pentru $n, m \geq 2$. Astfel se obține că, dacă pe o mulțime finită Q există quasigrupuri auto-ortogonale $m-$are și, respectiv $n-$are, unde $n, m \geq 2$, atunci pe această mulțime există quasigrupuri $mn-$are auto-ortogonale. În particular, din această construcție rezultă că există quasigrupuri $2^n-$are auto-ortogonale de orice ordin $q \neq 1, 2, 3, 6$, pentru orice $n \geq 1$.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Teza dată se referă la studiul quasigrupurilor $n-$are cu un număr exact de parastrofi distincți, în particular la quasigrupuri $n-$are cu sisteme maximale ortogonale de parastrofi distincți, numite quasigrupuri total parastrofic-ortogonale.

Scopul tezei constă în obținerea unor caracterizări ale quasigrupurilor n-are ($n = 2, 3, 4$), ce posedă un număr exact posibil de parastrofi distincți, în particular, seturi maximale ortogonale de parastrofi, precum și estimarea spectrului lor.

Problema existenței quasigrupurilor n-are, ce posedă un număr dat de parastrofi distincți, și a caracterizării spectrului lor, formulată de Lindner și Steedly, este considerată pentru clasa $n-T$-quasigrupurilor ($n = 2, 3, 4$), inclusiv cu sistemele maximale ortogonale de parastrofi distincți. În caz ternar problema existenței quasigrupurilor finite cu un număr exact de parastrofi distincți a fost soluționată de M. McLeish, integral pentru k=1, 3, 4, 6, 12, 24 parastrofi distincți și parțial pentru $k = 2, 8$ parastrofi distincți. Problema caracterizării quasigrupurilor liniare cu un număr exact dat de parastrofi distincți, inclusiv ortogonali, a fost inițiată de către autorea tezei în colaborare cu G. Beleavskaya [18], fiind abordată în caz ternar de Sokhatsky, Fryz, Pirus ș.a.

În teză sunt prezentate următoarele rezultate principale ale autoarei:

1. Sunt introduse și studiate două clase noi de quasigrupuri binare: DC-quasigrupuri (ce posedă șase parastrofi distincți) și $totCO-$quasigrupuri (ce posedă șase parastrofi ortogonali);
2. Se demonstrează că clasa DC-quasigrupurilor este închisă în raport cu transformarea de parastrofie și că orice quasigrup netrivial ce este imagine omomorfică a unui DC-quasigrup este un DC-quasigrup.
3. Este caracterizat spectrul $DC-T-$ quasigrupurilor finite. Se arată că există $DC-T-$quasigrupuri de ordinul n, pentru orice $n \geq 5$, $n \neq 6$.
4. Sunt obținute caracterizări ale $totCO-$ quasigrupurilor. În particular se arată că clasa $totCO-$quasigrupurilor este închisă în raport cu transformarea de parastrofie și imaginile omomorfice, sunt date condiții necesare și suficiente ca un T-quasigrup binar să fie un $totCO-$quasigrup.
5. C.C. Lindner și D. Steedly [76] au arătat că există quasigrupuri binare finite cu exact 1, 2, 3 sau 6 parastrofi distincți și au caracterizat integral spectrul lor. Pentru soluționarea acestor probleme, acești autori au utilizat, în particular, cinci identități de lungime patru, cu două variabile. Autoarea tezei a precizat acest rezultat, arătând că una dintre cele cinci identităti poate fi eliminată (Propozitia 1.1.4).
6. Sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T-$quasigrup ternar să posede exact k parastrofi distincti, unde k=3, 4 sau 6. Sunt construite exemple și sunt date estimări ale spectrului lor. Se

arată că: a) există quasigrupuri ternare finite, cu exact trei parastrofi distinți, de orice ordin $q \geq 3$; b) există T −quasigrupuri ternare finite, ce au exact 4 parastrofi distincți, de orice ordin impar $q \geq 3$; c) există T −quasigrupuri ternare finite de ordin impar $q, (q, 3) = 1$, ce posedă exact șase parastrofi distincți.

7. Sunt date condiții necesare și suficiente ca un T −quasigrup 4-ar să aibă exact 1, 5, 10 sau 20 de parastrofi distincți. Sunt prezentate unele estimări ale spectrului acestor quasigrupuri.
8. Se demonstrează că nu există T-quasigrupurile 4-are cu exact 2, 6 sau 15 parastrofi distincți.
9. Sunt prezentate estimări ale spectrului quasigrupurilor n-are parastrofic-ortogonale, respectiv, total parastrofic-ortogonale, $n = 2, 3, 4,$ inclusiv a totCO-quasigrupurilor: a) nu există totCO-quasigrupuri binare de ordin mai mic ca 7, însă există astfel de quasigrupuri de orice ordin q, reciproc prim cu 2, 3, 5 și 7; b) există quasigrupuri ternare finite cu exact trei parastrofi distincți, ce sunt și ortogonali, de orice ordin impar $q \geq 3$; c) există quasigrupuri ternare finite de orice ordin impar $q \geq 3$ ce au exact 4 parastrofi distincți ce sunt și ortogonali; d) există quasigrupuri 4-are cu exact 5 parastrofi distincți și ortogonali de orice ordin $q \geq 3$.
10. În baza metodei de construcție a sistemelor ortogonale de operații n −are, date de Trevor Evans, sunt prezentate construcții ale operațiilor n −are parastrofic-ortogonale, în particular auto-ortogonale k −are, unde k are una din următoarele forme: $k = n^2, 2^n, mn$, unde n, $m \geq 2$. Astfel se obține că, dacă pe o mulțime finită Q există quasigrupuri auto-ortogonale m − are și, respectiv n − are, unde n, $m \geq 2$, atunci pe această mulțime există quasigrupuri mn −are auto-ortogonale. În particular, din această construcție rezultă că există quasigrupuri 2^n −are auto-ortogonale de orice ordin $q \neq 1, 2, 3, 6,$ pentru orice $n \geq 1$.

Rezultatele autoarei T. Rotari (T. Popovich) la tema tezei de doctorat au fost publicate în 27 de lucrări științifice [17-23, 95-101, 104-111, 134, 135, 155-157].

Recomandări:

1. Metoda de caracterizare a T −quasigrupurilor cu un număr exact dat de parastrofi distincți poate fi utilizată pentru obținerea unor rezultate analogice în cazul quasigrupurilor 4-are cu exact k parastrofi distincți pentru $k \geq 24$, $k|120$;
2. Caracterizarea spectrului quasigrupurilor ternare cu exact doi sau exact opt parastrofi distincți necesită elaborarea unor metode noi de construcție a unor astfel de quasigrupuri, de exemplu, metode combinatorice;
3. La caracterizarea quasigrupurilor n −are total parastrofic-ortogonale cu exact k parastrofi distincți, unde $k < n$, pot fi utilizate alte definiții ale ortogonalității;
4. Sistemele ortogonale de quasigrupuri n −are, $n \geq 2$, pot fi utilizate la construirea MDS-codurilor, în criptografie, la planificarea experimentelor, în combinatorică ș.a.

BIBLIOGRAFIE

1. ABEL R. J. R. Four MOLS of orders 20, 30, 38 and 44. In: *Journal of Combinatorial theory, Series A*, 1993, V. 64, pp. 144-148. ISSN 0097-3165
2. ABEL R. J. R. Four mutually orthogonal Latin Squares of orders 28 and 52. In: *Journal of Combinatorial theory, Series A*, 1991, V. 58, pp. 306-309. ISSN 0097-3165
3. ABEL R. J. R., BENNETT F. E. Existence of two SOLS and two ISOLS. In: *Discrete Mathematics,* 2012, V. 312, pp. 854-867. ISSN 0012-365X
4. ABEL R. J. R., BENNETT F. E. Existence of HSOLSSOMs of type $4^n u^1$. In: *Australasian Journal of Combinatorics,* V. 59 (2), 2014, pp. 260-281. ISSN 1034-4942
5. ARKIN J. A solution to the classical problem of finding systems of three mutually orthogonal issues in a cube formed by three superimposed $10 \times 10 \times 10$ cubes. In: *Fibonacci Quarterly*, 1973, V.11 (5), pp. 480-484. ISSN 0015-0517
6. ARKIN J., STRAUSS E. G. Orthogonal latin systems. In: *Fibonacci Quarterly,* 1981, V.19 (4), pp. 289-292. ISSN 0015-0517
7. BEDFORD D. Construction of orthogonal latin squares using left neofields. In: *Discrete Mathematics,* 1993, V. 115, pp. 17-38. ISSN 0012-365X
8. BELEAVSKAYA, G. B. *Quasigroups and Loops: Theory and Applications.* Nova Science Publichers, 2005.
9. BELOUSOV, V. Parastrophic-orthogonal quasigroups. In: *Quasigroups and related systems,* 2005, V. 13, No. 1, pp. 25–72. ISSN 1561-2848
10. BELOUSOV, V. D. *Foundations of the Theory of Quasigroups and Loops*. (in Russian) Nauka, Moscow, 1967, 224 p.
11. BELOUSOV, V. D. Parastrophic invariants of quasigroups. In: *Matematicheskii Sbornik,* Vol. 38 (80), 1956, pp. 3-20 (in russian) ISSN 0368-8666
12. BELYAVSKAYA G. B. Successively orthogonal systems of k-ary operations. Quasigroups and Related Systems, 2014, V. 22, pp. 165-178. ISBN 1561-2848
13. BELYAVSKAYA G. B. S-systems of n-ary quasigroups. In: *Quasigroups and Related Systems,* 2007, V. 15, pp. 251-260. ISSN 1561-2848
14. BELYAVSKAYA G. B. r-Orthogonal Latin squares, In: *J. Dénes and A. D. Keedwell (Editors), Latin Squares: New Developments,* Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1992. ISBN 978-0444-88-899-0
15. BELYAVSKAYA G. B., DIORDIEV A. D. On some quasi-identities in finite quasigroups. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, Matematica, 2005, No. 3(49), 19–32.

16. BELYAVSKAYA G. B., MULLEN G. L. Orthogonal hypercubes and n-ary operations. Quasigroups and Related Systems, 2005, 13, p. 73-86.
17. BELEAVSCAIA, G., POPOVICI, T. Near-totally conjugate orthogonal quasigroups. In: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat*., 2014, nr. 3 (76), pp. 89-96. ISSN 1024-7696
18. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. Totally conjugate orthogonal quasigroups and complete graphs. In: *Journal of Mathematical Sciences,* 2012, vol.185, no. 2, pp. 184–191. ISSN 1072-3374
19. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. On the classes of quasigroups defined by the conjugate sets. In*: Abstracts of Conference "Mathematics&Information technologies: Research and Education" (MITRE-2011),* August 22-25, 2011, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 8-9. ISBN 978-9975-71-137-1
20. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. Conjugate sets of loops and quasigroups. DC-quasigroups. In: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, 2012, V. 1 (68), pp. 21-31. ISSN 1024-7696
21. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. About quasigroups with distinct conjugates. In: *Abstracts of the 8-th International Algebraic Conference in Ukraine Dedicated to the memory of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko,* July 5-12, 2011, Lugansk, Ukraine, p. 247.
22. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. On totally and near-totally conjugate-orthogonal quasigroups. In: *Abstracts of the International Scientific Conf. "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE 2009),* October 8-9, 2009. Chișinău, Republica of Moldova, pp. 3-4. ISBN 978-9975-70-891-3
23. BELYAVSKAYA G., POPOVICH T. Totally conjugate-orthogonal quasigroups. In: *Abstracts of the 7-th International Algebraic Conference in Ukraine.* Kharkov, 18-23 August, 2009 pp. 26-27
24. BENNET F. E. Latin squares with pairwise orthogonal conjugates. In: *Discrete Mathematics,* 1981, V. 36, pp. 117–137. ISSN 0012-365X.
25. BENNET F. E. On conjugate orthogonal idempotent Latin squares. In: *Ars. Combinatorica*, 1985, V. 19, pp. 37–50. ISSN 0381-7032.
26. BENNETT F. E. *Quasigroups.* In: „Handbook of Combinatorial Designs". Eds. C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, CRC Press, 1996. 784 p. ISBN 978-0849-383-98-4
27. BENNETT F. E. Self-orthogonal semisymmetric quasigroups. In: J. *Combinatorial Theory, Ser. A*, 1982, V.33, pp. 117-119. ISSN 0097-3165
28. BENNET F. E., MENDELSOHN N. S. Conjugate orthogonal Latin square graphs. In: *Congressus Numerantium,* 1979, V. 23, pp. 179–192. ISSN 0384-9864

29. BENNETT F. E., DU B., ZHANG H. Existence of $(3,1,2)$- conjugate orthogonal diagonal latin squares. John Wiley & sons, Inc. J. In: *Combin. Designs*, 2001, V. 9, pp. 297-308. ISSN 1063-8539
30. BENNETT F. E., DU B., ZHANG H. Existence of Conjugate Orthogonal Diagonal Latin Squares. John Wiley & sons, Inc. In: *J.Combin. Designs*, 1997, V. 5, pp. 449-461. ISSN 1063-8539.
31. BENNETT F. E., ZHANG H. Latin Squares with Self-orthogonal conjugates. In: *Discrete Mathematics,* 2004, V. 284, pp. 45-55. ISSN 0012-365X
32. BENNETT F. E., ZHANG H. Quasigroups satisfying Stein's third law with a specified number of idempotents. In: *Discrete Mathematics*, Volume 312, Issue 24, 28 December 2012, pp. 3585-3605. ISSN: 0012-365X
33. BENNETT F. E., ZHU L. Conjugate-orthogonal Latin squares and related structures. In *"Contemporary design theory" .Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley,* New York, 1992, pp. 41-96. ISBN 978-0471-531-02-8
34. BOSE R. C. A note on the resolvability of balanced incomplete block designs. In:: The Indian *Journal of Statistics*, Sankhya, 1942, vol. 6, pp. 105–110. ISSN 0976-836X
35. BOSE R. C. On the construction of balanced incomplete block designs. In: *Ann. Eugen.* London, 1939, V. 9, pp. 353-399.
36. BOSE R. C., CONNOR W. S. Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs. In: *Ann. Math. Stat.*, 1952, V. 23, pp. 367-383.
37. BOSE R. C., SHRIKHANDE S. S. On the falsity of Ruler's conjecture about the non-existence of two orthogonal Latin squares of order 4t + 2. In: *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A., 1959, V. 45, pp. 734-737.
38. BOSE R. C., SHRIKHANDE S. S., BHATTACHARYA K. On the construction of group divisible incomplete block designs. In: *Ann. Math. Stat.*, 1953, nr. 24 pp. 167-195.
39. BOSE, R. C., SHRIKHANDE, S. S., PARKER, E. T. Further results of the constructions of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture. In: *Canadian Journal of Mathematics*. 1960, V. 12, pp. 189-203. ISSN 0008-414X
40. BRAYTON R. K., COPPERSMITH D., HOFFMAN A. J. Self-orthogonal latin squares of all orders $n \neq 2,3,6$. In: *Bulletin of the american mathematical society,* 1974, Vol. 80, no 1, pp. 116-118.
41. BROWER A. E. Four MOLS of order 10 with a hole of order 2. In: *J. Statist. Planning and Inf.*, 1984, nr.10, pp. 203-205.
42. BURGER A. P., KIDD M. P., VAN VUUREN J. H. Enumeration of self-orthogonal Latin Squares, 2010.

43. BUSH K. A. Orthogonal arrays of index unity. In: *Ann. Math. Stat.*, 1952, V. 28, pp. 426-434.
44. CEBAN D. A method of construction of n-ary self-orthogonal quasigroups. In: *Abstracts of International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE - 2015),* July 2-5, 2015, Chişinău, pp. 20-21.
45. CEBAN D. On some identities in ternary quasigroups. In: *Studia Universitatis Moldaviae, Seria „Științe exacte și economice”,* 2016, nr. 2(92), pp. 40-45. ISSN 1857-2073
46. CEBAN D. On π-quasigroups of types T_1 and T_2. *Conferința Științifică Internațională a Doctoranzilor „Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători”,* Academia de Științe a Moldovei, 10 martie 2015, p. 16.
47. CEBAN D., SYRBU P. On paratopies of orthogonal systems. In: *Abstracts of International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE - 2016),* June 23-26, 2016, Chişinău, pp.17-18.
48. CEBAN D., SYRBU P. On quasigroups with some minimal identities. In: *Studia Universitatis Moldaviae, Seria „Științe exacte și economice”,* 2015, nr. 2 (82), pp. 47-52. ISSN 1857-2073
49. CEBAN D., SYRBU P. On the holomorph of π-quasigroups of type T_1. In: *Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Republic of Moldova,* August 19-23, 2014, Chişinău, pp. 34-37.
50. CHAFFER R. A., LIEBERMAN D. J., SMITH D. D. The number of orthogonal conjugates of a quasigroup. In: *Congressus Numerantium,* 1982, pp.169–180.
51. CHEN K., ZHANG Y., ZHANG H. Strongly symmetric self-orthogonal diagonal Latin squares and Yang Hui magic squares. In: *Discrete Math,* 2014, V. 328, pp. 79-87.ISSN 0012-365X
52. DENES J., KEEDWELL A. D. *Latin squares and their applications.* Academic Press, New York, 1974, 547 p.
53. DENES, J., KEEDWELL, A. D. *Latin squares and their applications*: Second edition. Elsevier, 2015. 453 p. ISBN 978-0444-63-555-6
54. DENES J., KEEDWELL A. D. Latin squares: new developments in the Theory and Applications. In: *Annals of Discrete Mathematics*, 1991, V. 46, p. 453.
55. EVANS T. Algebraic structures associated with Latin squares and orthogonal arrays. In: *Proc. Conf. Algebraic Aspects of Combinatorics, Congressus Numerantium*, 1975, nr.13, pp. 31–52.
56. EVANS T. Embediding incomplete latin squares. In: *Amer. Math.,* Montly, 1960, nr. 67, pp. 958-961.
57. EVANS T. Latin cubes orthogonal to their transposes - a ternary analogue of Stein quasigroups. In: *Aequat. Math.,* 1973, 9, N2/3, pp. 296–297.

58. EVANS T. The construction of orthogonal k-skeins and latin k-cubes. In: *Aequat. Math.*, 1976, V. 14, N3, pp. 485-491.
59. FRYZ, I., SOKHATSKY, F. Construction of medial ternary self-orthogonal quasigroups. In: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.,* 2022, No. 3 (100), pp. 41-55. ISSN 1024-7696
60. GOIAN I., SÂRBU P., TOPALĂ A. *Grupuri și inele.* Chișinău, CEP USM, 2005. -246 ISBN 9975-70-499-9
61. GOLOMB S. W., POSNER E. C. Rook domains, latin squares, affine planes, and error-distributing codes. *IEEE Trans. Information theory*. IT-10, 1964, pp. 196-208.
62. GRAHAM G. P., ROBERTS C. E. Complete Sets of Orthogonal, Self-Orthogonal Latin Squares. In: *Ars Combinatoria*. 2002, nr. 64, pp. 193-198. ISSN 0381-7032
63. GRAHAM G. P., ROBERTS C. E. Projective Planes and Complete Sets of Orthogonal, Self-Orthogonal Latin Squares. In: *Congressus Numerantium,* 2007, V. 184, pp. 161-172. ISSN 0384-9864
64. GUERIN R. Existence et proprietes des carres latins orthogonaux I. In: *Publ. Inst. Statist. Univ*. Paris, 1966, V. 15, pp. 113-213.
65. GUERIN R. Existence et proprietes des carres latins orthogonaux II. In: *Publ. Inst. Statist*. *Univ.* Paris, 1966, v. 15, pp. 215-293.
66. HAMMING R.W. Error detecting and error correcting codes. In: *Bell System Tech. J.,* 1950, nr. 29, pp. 147-160.
67. HANANI H. On the number of orthogonal latin squares. In: *J. Combin. Theory,* 1970, v. 8, pp. 247-271.
68. HEDAYAT A., PARKER E. T., FEDERER W. T. The existence and construction of two families of designs for two sucessive experiments. Biometrika, 1970, V. 57, pp. 351-355.
69. JOYNER D. AND KIM JON-L. Selected unsolved problems in coding theory. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhuser/Springer, New York, 2011.
70. KEPKA T., NEMEC, T. T-quasigroups. I, In: *Acta Universitatis. Carolinae. Math. et Phys*., 1971, V. 12, N1, pp. 39-49.
71. KEPKA T., NEMEC, T. T-quasigroups. II, In: *Acta Universitatis. Carolinae. Math. et Phys.*, 1971, V. 12, N2, pp. 31-49.
72. LAYWINE C. F., MULLEN G. L., WHITTLE G. d-Dimensional hypercubes and the Euler and Macneish conjectures. In: *Monatsh. Math.*, 1995, V. 119, pp. 223-238. ISSN 0026-9255
73. LEVI F. W. Finite geometrical systems. University of Calcutta, 1942.
74. LIN C. D. Construction of orthogonal and nearly orthogonal latin hypercubes. In: *Biometrika*, 2009, V. 96, pp. 243-247. ISSN 0006-3444

75. LINDNER C. C., MENDELSOHN N. S. Construction of perpendicular Steiner quasigroups. In: *AequationesMath.* 1973, V. 9, pp. 150-156. ISSN 0001-9054
76. LINDNER, C. C., STEEDLY, D. On the number of conjugates of a quasigroup. In: *Algebra Univ.,* 1975, V. 5, pp. 191–196. ISSN 0002-5240
77. MACNEISH H. F. Ruler squares, Ann. Math., 28, 1922, pp. 221-227.
78. MANN H. B. On orthogonal latin squares. In: *Bull.Amer. Math. Soc*, 1944, nr.50, pp. 249-257.
79. MANN H. B. The construction of orthogonal Latin squares. In: *Ann. Math. Stat.*, 1942, nr. 13, pp. 418-423.
80. McLEISH, M. On the number of conjugates of $n-$ary quasigroups. In*: Canadian Journal of Mathematic*, 1979, V. 31, nr. 3, pp. 637-654. ISSN 0008-414X
81. McLEISH, M. On the existence of ternary quasigroups with 2 or 8 conjugacy classes. In: *Journal of Combinatorial Theory,* Seria A, 1980, V.29, nr. 2, pp. 199-211. ISSN 0097-3165
82. MENDELSOHN N. S. A natural generalization of Steiner triples systems. *Computers in Number Theory (Proc. Sci. Res. Council Atlas Sympos. No. 2, Oxford, 1969),* Academic Press, London, 1971, pp. 323-338.
83. MENDELSOHN N. S. Combinatorial designs as models of universal algebras. In *"Recent Progress in Combinatorics". Proc. Third Waterloo Conf. on Combinatorics*, 1968, Academic Press, New York, pp.123-132.
84. MENDELSOHN N. S. Latin Squares orthogonal to their transpose. In: *Journal of combinatorial theory*, 1971, V. 11, pp. 187-189. ISSN 0097-3165
85. MENDELSOHN N. S. Orthogonal Steiner systems. In: *Aequationes mathematicae*, 1970, V.5, pp. 268-272. ISSN 0001-9054
86. MOUFANG, R. Alternativkorper und der Satz vom vollstandigen Vierseit. In: *Adhandlungen aus dem Mathetischen Seminar der Universitat Hamburg,* 1933, V. 9, pp. 207-222, ISSN 0014-4428
87. MULLEN G., SHCHERBACOV V. On orthogonality of binary operations and squares. In: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.,* 2005, No. 2 (48), pp. 3–42. ISSN 1024-7696
88. MULLEN G.L., SHCHERBACOV V. Properties of codes with one check symbol from a quasigroup point of view. In: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.,* 2002, N 3 (40), pp. 71–86. ISSN 1024-7696
89. MULLEN G.L., SHCHERBACOV V. n-T-quasigroup codes with one check symbol and their error detection capabilities. In: *Comment. Math. Univ. Carolinae,* 2004, V. 45, N 2, pp. 321–340. ISSN 0010-2628
90. NORTON D. A., STEIN S. K. Cycles in algebric systems. In: *Proc. Amer. Math. Soc*., 1956, 7, pp. 999-1004.

91. PARKER E. T. Construction of some sets of pairwise orthogonal Latin squares. In: *Amer. Math. Soc. Notices*, 1958, V. 5,p. 815
92. PARKER E. T. Orthogonal Latin squares. In: *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A., 45, 1959, V. 45, pp. 859-862. ISSN 0027-8424
93. PFLUGFELDER, H. O. *Quasigroups and loops: introduction.* Berlin: Heldermann Verlag, 1990. 147 p. ISBN 978-3885-38-007-8
94. PHELPS K. T. Conjugate orthogonal quasigroups. Journal of combinatorial theory, Series A, 1978, V. 25, pp. 117-127.
95. POPOVICH, T. On conjugate sets of quasigroups. *Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat.,* 2011, nr. 3(67), pp. 69-76. ISSN 1024-7696
96. POPOVICH, T. On near-conjugate-orthogonal quasigroups. In: *Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50,* August 19-23, 2014, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 150-153. ISBN 978-9975-68-245-9
97. POPOVICH, T. Orthogonal sets of conjugates of T-quasigroups. In: *Abstracts of Conference on Applied and Industrial Mathematics Dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu.* Chișinău, August 22-25, 2012. Chișinău, Republic of Moldova, pp. 187-188. ISBN 978-9975-76-090-4
98. POPOVICH, T. On the conjugate sets of quasigroups and identities. In: *Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics&IT:Research and Education"(MITRE 2011),*August 22-25, 2011. Chișinău, Republic of Moldova, pp. 95-96. ISBN 978-9975-144-9
99. POPOVICH, T. On sets of conjugates of quasigroups. In: *Abstracts of the 8-th International Algebraic Conference in Ukraine Dedicated to the memory of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko,* July 5-12, 2011, Lugansk, Ukraine, p. 269.
100. POPOVICH, T. Conjugate-orthogonal Quasigroups and Graphs. In: *International Workshop on Intelligent Information System*: *Proceeding IIS,* September 13-14, 2011, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 256-259. ISBN 978-9975-4237-0-0
101. POPOVICI, T., SHCHERBACOV, V. Parastrophes orthogonality of alinear quasigroups. In: *Abstracts of the XI International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko,* July 03-07, 2017, Kyiv, Ukraine, p. 104
102. PREECE D.A., PEARCE S.C. and KERR J.R. Orthogonal designs for three-dimensional experiments. In: *Biometrika,* 1973, V. 60, pp. 349-358.
103. RAO C. R. Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays. In: *J.Roy. Stat. Soc. Suppl.,* 1947, V. 9, pp. 128-139.
104. ROTARI, T. Ternary quasigroups with exactly four distinct parastrophes, which are orthogonal. In: *Abstracts of the National conference with international participation: Natural Sciences in the*

Dialogue of Generations, September 18-19, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, p. 22. ISBN 978-9975-62-898-3

105. ROTARI, T. On ternary quasigroups with exactly three distinct and orthogonal parastrophes. In: *Abstracts of the International Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2024),* September 19-22, 2024, Oradea, Romania, p. 64. ISSN 2537-2688

106. ROTARI, T. Parastrophes of ternary quasigroups and their orthogonality. In: *Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE 2023),* June 26-29, 2023. Chișinău, Republic of Moldova, p. 32. ISBN 978-9975-62-535-7

107. ROTARI, T. On the conjugate sets of IP-quasigroups. In: *Abstracts of the XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky*, July 02-06, 2019, Vinnytsia, Ukraine, pp. 94-95. Disponibil: https://jiac.donnu.edu.ua/article/view/6993

108. ROTARI, T., SYRBU, P. On 4-T-quasigroups with exactly 20 distinct parastrophes. In: *Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat.,* 2025, No. 1 (107), pp. 107-119. ISSN 1024-7696

109. ROTARI, T., SYRBU, P. On 4-quasigroups with exactly ten distinct parastrophes. In: *Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE 2025),* June 26-29, 2025. Chișinău, Republic of Moldova,, p. 24. ISBN 978-9975-62-879-2 (PDF)

110. ROTARI, T., SYRBU, P. On 4-quasigroups with exactly five distinct parastrophes. In: *Abstracts of the International Conference on Quasigroups and Related Systems (ConfQRS),* July 2 – 4, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, p. 33. ISBN 978-9975-62-880-8

111. ROTARI, T., SYRBU, P. On $n-$ary $T-$quasigroups with a prescribed maximum number of distinct parastrophes. In: *Abstracts of the 32nd International Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2025),* September 18 – 21, 2025, Bucharest, Romania, p. 99. ISSN 2537-2688

112. SADE A. Groupoides orthogonaux. In: *Publ. Math. Debrecen,* 1958, V. 5, pp. 229-240.

113. SADE A. Produit direct-singulier de quasigroupes orthogonaux et anti-abeliens. In: *Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. I,* 1960, v. 74, pp. 91-99. ISSN 0037-8943

114. SADE, A. Quasigroupes obéissant à certaines lois. In: *Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Série A.* 1957, V. 22, pp. 151–184. ISSN 0364-541X

115. SCERBACOVA A., SHCHERBACOV V. On spectrum of medial T_2-quasigroups. In: *Bul. Acad. Științei Repub. Mold. Mat.* 2016, no2, pp. 143-154. ISSN 1024-7696

116. SHCHERBACOV V. About orthogonality of a quasigroup and its parastrophes. *International Conference on Radicals (ICOR-2003), Program and Abstracts (Chișinău),* August 2003, pp. 47-48.

117. SHCHERBACOV V. On parastroph orthogonality of finite binary quasigroups. *International Conference on Radicals, Abstracts,* July 30-August 5, Kyiv, 2006, pp. 66-67.

118. SHCHERBACOV V. Transformations of grupoids which preserve the property of orthogonality. *Mathematics Applies in Biology and Biophysics, Abstracts*, Iași, June, 16-17, 2006, pp. 35-36.
119. SHCHUKIN K. K. On isotopies, parastrophies, and orthogonality of quasigroups. In: *Journal of Mathematical Sciences,* 2013, Vol. 193, No 4, pp. 639-644. ISSN 1072-3374
120. SMITH, J. D. H. *An Introduction to Quasigroups and Their Representations.* CRC Press, 2007. 226. ISBN 978-1584-886-91-2
121. SOKHATSKY, F., FRYZ, I. Invertibility criterion of composition of two multiary quasigroups. In: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. 2012, V. 53, nr. 3, pp. 429–445. ISSN 0010-2628
122. SOKHATSKY F., PIRUS I. About top-quasigroups. In: *Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova, IMCS-50,* Chișinău, August 19-23, 2014, pp. 162-165.
123. SOKHATSKY, F., PIRUS, Y. Classification of ternary quasigroups according to their parastrophic symmetry groups, I. In: *Visnik DonNU. Ser. A: Prirod. nauki*, 2018, nr. 1-2, pp. 70–81. ISSN 2522-4468
124. SOKHATSKY, F., PIRUS, Y. Classification of ternary quasigroups according to their parastrophic symmetry groups, II. In: *Visnik DonNU. Ser. A: Prirod. nauki*, 2019, nr. 1-2, pp. 101–110. ISSN 2522-4468
125. STEIN S. K. On the foundations of quasigroups. Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, p. 228-256.
126. STOJAKOVIC Z., PAUNIC D. Self-orthogonal cyclic n-quasigroups. In: *Aequationes mathematicae,* 1986, nr. 30, pp. 252-257.
127. SUSCHKEWITSCH, A. K. Zur Theorie der endlichen Gruppen nichtassoziativer Systeme. In: *Mathematische Annalen*. 1928, V. 99, pp. 30–50. ISSN 0025-5831
128. SYRBU P. On π-quasigroups isotopic to abelian groups. In: *Bul. Acad. Științe a Repub. Mold. Mat.* 2009, 3(61), pp. 109-117. ISSN 1024-7696
129. SYRBU P., CEBAN D. On orthogonal systems of ternary quasigroups admitting at least one paratopy. In: *The 24th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM - 2016),* September 15-18, 2016, Craiova, România, p. 72.
130. SYRBU P., CEBAN D. On orthogonal systems of ternary quasigroups admitting nontrivial paratopies. In: *Quasigroups and related systems.* Vol. 25 (2017), No. 1, pp.133-150. ISSN 1561-2848
131. SYRBU P., CEBAN D. On paratopies of orthogonal systems of ternary quasigroups. I. In: *Bul. Acad. Științe a Repub. Mold. Mat.*, 2016, No. 1(80), pp. 91-117. ISSN 1024-7696

132. SYRBU P., CEBAN D. On quasigroups with some minimal identities. *Conferința științifică națională cu participare internațională „Învățământul superior din Republica Moldova la 85 de ani", Universitatea de Stat din Tiraspol,* 24-25 septembrie 2015, Chișinău, pp. 40-43.
133. SYRBU P., CEBAN D. On π-quasigroups of type T_1. In: *Bul. Acad. Științe a Repub. Mold. Mat.,* 2014, No. 2(75), pp. 36-43. ISSN 1024-7696
134. SYRBU, P., ROTARI, T. On Self-Orthogonal n-ary Quasigroups. In: *Proceedings of the Int. Conf. dedicated to the 60th anniversary of the foundation of V. Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science,* October 10-13, 2024, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 126 – 131. ISBN 978-9975-68-523-8
135. SYRBU, P., ROTARI, T. On self-orthogonal finite $n-$ary quasigroups. In: *Abstracts of the International Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2024),* September 19-22, 2024. Oradea, Romania, p. 63. ISSN 2537-2688
136. TARRY G. Le problème de 36 officiers. *Compte Rendu de l'Assoc. Français Avanc. Sci. Naturel 1*, 1900, pp. 122-123.
137. TARRY G. Le problème de 36 officiers. *Compte Rendu de l'Assoc. Français Avanc. Sci. Naturel 2,* 1901, pp.170-203.
138. USAN J. Orthogonal systems of n-ary operations and codes. In: M*at. Vestnik,* 1978, nr. 2(15) (30), pp. 91-93.
139. WILSON R.M. Concerning the number of mutually orthogonal latin squares. In: *Discrete Math.,* 1974, V. 9, pp. 181-198. ISSN 0012-365X
140. WOJTAS M. Five mutually orthogonal Latin squares of order 24 and 40. In: *Discrete Mathematics,* 1995, nr. 140, pp. 291-294. ISSN 0012-365X
141. YATES F. Incomplete randomised blocks. In: *Ann. Eugen.* London. 1936, V.7, pp. 121-140.
142. ZHU L. Orthogonal diagonal latin squares of order fourteen. In: *J. Austral. Math. Soc. Series A,* 1984, V. 36, pp. 1-3. ISSN 0263-6115
143. БЕКТЕНОВ А., ЯКУБОВ Т. Системы ортогональных n-арных операций. *Известия АН МССР, Сер. физ.-тех. и мат. наук,* 1974, N3, сс. 7-14.
144. БЕЛОУСОВ В. *Алгебраические сети и квазигруппы.* Кишинев, Штиинца, 1971, 165 с.
145. БЕЛОУСОВ В. Замкнутые системы взаимно ортогональных квазигрупп. В: *Усп. Мат. Наук.,* 1962, No. 6(108), сс. 202-203.
146. БЕЛОУСОВ В. О группе, ассоциированной квазигруппе. В: *Мат. Исслед,* 1969, 4, No. 3, сс. 21–39.
147. БЕЛОУСОВ В. *Парастрофно-ортогональные квазигруппы.* АН МССР, Кишинев, 1983, 51 с.
148. БЕЛОУСОВ В.Системы ортогональных операций. *Матем. сб.,*1968,77(119):I, с. 38–58.

149. БЕЛОУСОВ В. Уравновешенные тождества в квазигруппах. *Матем. сб.,* 1966, 70(112), Вып.1, сс. 55-97.

150. БЕЛОУСОВ В. n-Арные квазигруппы. Кишинев, Штиинца, 1972, 223 с.

151. БЕЛОУСОВ В. Д., ГВАРАМИЯ А. Об квазигруппах Стейна. В: *Сооб. Груз.* ССР, 1966, Вып. 44, сс. 537-544.

152. БЕЛОУСОВ В., ЯКУБОВ Т. Об ортогональных n-арных операциях. В: *Вопросы кибернетики,* 1975, Вып.16, сс. 3–17.

153. БЕЛЯВСКАЯ Г., СЫРБУ П. О классе самоортогональных n-группоидах. Известия АН МССР, 1989(2), с. 25-30.

154. БЕЛЯВСКАЯ Г., ТАБАРОВ А. Характеристика линейных и алинейных квазигрупп. Дискрет. матем., 1992, в. 4, no. 2, с. 142-147.

155. БЕЛЯВСКАЯ Г. Б., ПОПОВИЧ, Т. В. Тотально парастрофно-ортогональные квазигруппы и полные графы. В: *Фундаментальная и прикладная математика.* Москва, 2010, том 16, выпуск 8. сс. 17-26. ISSN 1560-5159

156. БЕЛЯВСКАЯ, Г., ПОПОВИЧ, Т. О графах, связанных с квазигруппами. *IN: Topics in graph theory. A tribute to A. A. and T. E. Zykovs on the occasions of A. A. Zykov's 90th birthday.* University of Illinois at Urbana-Champaign, 2013. pp. 187–193. https://kostochk.web.illinois.edu/Zykov90-Topics_in_Graph_Theory.pdf

157. ПОПОВИЧ Т. О парастрофно-ортогональных квазигруппах и графах. В материалы X Международного семинара Дискретная математика и ее приложения. (Москва, 1-6 февраля 2010), сс. 258-260 https://keldysh.ru/dms/10dmsem-2010.pdf

158. СЫРБУ П. Квазигруппы с тождеством самоортогональности и их спектр. В: *Мат. Исслед.* 1991, 20, сс. 80-91.

159. СЫРБУ П. О самоортогональности n-арных операций. Кишинев, 1988, с. 92-97.

160. СЫРБУ П. Об ортогональности и самоортогональности n-арных операций. В: *Мат. Исслед,* Вып. 95, Кишинев, Штиинца, 1987, сс. 121-130. ISSN 0542-9994

161. СЫРБУ П. Самоортогональные n-группы. В: *Мат. Исслед.* 1990, V. 113, сс. 99-106.

162. СЫРБУ П., ЧЕБАН Д. Паратопии ортогональных систем тернарных квазигрупп. *XII Международный научный семинар "Дискретная математика и ее приложения" имени академика О. Б. Лупанова, МГУ имени М. В. Ломоносова,* Москва, 2016, сс. 267-270.

Anexa 1. Subgrupurile grupului S_4

Nr.	H_i	Ordinul subgrupului	Elementele subgrupului	Numărul de parastrofi distincți: $\lvert S_4 : H \rvert$
1.	H_1	1	$\{\varepsilon\}$	24
2.	H_2	2	$\{\varepsilon, (12)\}$	12
3.	H_3		$\{\varepsilon, (13)\}$	
4.	H_4		$\{\varepsilon, (14)\}$	
5.	H_5		$\{\varepsilon, (23)\}$	
6.	H_6		$\{\varepsilon, (24)\}$	
7.	H_7		$\{\varepsilon, (34)\}$	
8.	H_8		$\{\varepsilon, (12)(34)\}$	
9.	H_9		$\{\varepsilon, (13)(24)\}$	
10.	H_{10}		$\{\varepsilon, (14)(23)\}$	
11.	H_{11}	3	$\{\varepsilon, (123), (132)\}$	8
12.	H_{12}		$\{\varepsilon, (124), (142)\}$	
13.	H_{13}		$\{\varepsilon, (134), (143)\}$	
14.	H_{14}		$\{\varepsilon, (234), (243)\}$	
15.	H_{15}	4 (izomorfe cu Z_4)	$\{\varepsilon, (1234), (13)(24), (1432)\}$	6
16.	H_{16}		$\{\varepsilon, (1243), (14)(23), (1342)\}$	
17.	H_{17}		$\{\varepsilon, (1324), (12)(34), (1423)\}$	
18.	H_{18}	4 (izomorfe cu grupul lui Klein)	$\{\varepsilon, (12), (34), (12)(34)\}$	
19.	H_{19}		$\{\varepsilon, (13), (24), (13)(24)\}$	
20.	H_{20}		$\{\varepsilon, (14), (23), (14)(23)\}$	
21.	H_{21}		$\{\varepsilon, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$	
22.	H_{22}	6	$\{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\}$	4
23.	H_{23}		$\{\varepsilon, (12), (14), (24), (124), (142)\}$	
24.	H_{24}		$\{\varepsilon, (13), (14), (34), (134), (143)\}$	
25.	H_{25}		$\{\varepsilon, (23), (24), (34), (234), (243)\}$	
26.	H_{26}	8	$\{\varepsilon, (12), (34), (12)(34), (14)(23), (13)(24), (1423), (1324)\}$	3
27.	H_{27}		$\{\varepsilon, (14), (23), (14)(23), (13)(24), (12)(34), (1243), (1342)\}$	
28.	H_{28}		$\{\varepsilon, (13), (24), (12)(34), (14)(23), (13)(24), (1432), (1234)\}$	
29.	H_{29}	12	$\{\varepsilon, (12)(34), (14)(23), (13)(24), (123)\ (132), (124), (142), (134), (143), (243), (234)\}$	2
30.	H_{30}	24	S_4	1 (TS-quasigrup)

Anexa 2. Subgrupurile de ordinul 24, 20, 12, 8, 6, respectiv, ale grupului S_5

Grupul S_5 are în total 156 de subgrupuri, inclusiv: 25 de subgrupuri de ordinul 2, 10 subgrupuri de ordinul 3, 35 de subgrupuri de ordinul 4 (20 izomorfe cu grupul Klein K_4 și 15 subgrupuri ciclice), 6 subgrupuri de ordinul 5, 30 de subgrupuri de ordinul 6 (dintre care 10 ciclice), 15 subgrupuri de ordinul 8 (izomorfe cu D_8), 6 subgrupuri de ordinul 10 (izomorfe cu D_{10}) 15 subgrupuri de ordinul 12 (10 izomorfe cu Z_2xS_3 și 5 izomorfe cu A_4), 6 subgrupuri de ordinul 20, 5 subgrupuri de ordinul 24 (izomorfe cu S_4), 1 subgrup de ordinul 60 (izomorf cu A_5), și cele două subgrupuri triviale. Observăm că grupul S_5 nu are subgrupuri de ordinul 15, 30 sau 40 (numere care sunt printre divizorii lui 120).

În Anexa 2 sunt date subgrupurile grupului S_5 de ordinul: a) 24, b) 20, c) 12, d) 8, e) 6

a) Subgrupurile de ordinul 24 ale grupului S_5

Nr.	Elementele subgrupului	$H_1 =< (1234), (12) >$	$H_2 =< (12345), (12) >$	$H_3 =< (1245), (12) >$	$H_4 =< (1345), (13) >$	$H_5 =< (2345), (23) >$
1.	ε	ε	ε	ε	ε	ε
2.	α	(1234)	(1235)	(1245)	(1345)	(2345)
3.	α^2	(13)(24)	(13)(25)	(14)(25)	(14)(35)	(24)(35)
4.	α^3	(1432)	(1532)	(1542)	(1543)	(2543)
5.	β	(12)	(12)	(12)	(13)	(23)
6.	$\alpha\beta$	(234)	(235)	(245)	(345)	(345)
7.	$\alpha^2\beta$	(1324)	(1325)	(1425)	(1435)	(2435)
8.	$\alpha^3\beta$	(143)	(153)	(154)	(154)	(254)
9.	$\beta\alpha$	(134)	(135)	(145)	(145)	(245)
10.	$\beta\alpha^2$	(1423)	(1523)	(1524)	(1534)	(2534)
11.	$\beta\alpha^3$	(243)	(253)	(254)	(354)	(354)
12.	$\alpha\beta\alpha$	(1243)	(1253)	(1254)	(1354)	(2354)
13.	$\alpha\beta\alpha^2$	(132)	(132)	(142)	(143)	(243)
14.	$\alpha\beta\alpha^3$	(14)	(15)	(15)	(15)	(25)
15.	$\alpha^2\beta\alpha$	(142)	(152)	(152)	(153)	(253)
16.	$\alpha^2\beta\alpha^2$	(34)	(35)	(45)	(45)	(45)
17.	$\alpha^2\beta\alpha^3$	(123)	(123)	(124)	(134)	(234)
18.	$\alpha^3\beta\alpha^2$	(23)	(23)	(24)	(34)	(34)
19.	$\alpha^3\beta\alpha^2$	(124)	(125)	(125)	(135)	(235)

20.	$\alpha^3\beta\alpha^3$	(1342)	(1352)	(1452)	(1453)	(2453)
21.	$\beta\alpha^2\beta$	(14)(23)	(15)(23)	(15)(24)	(15)(34)	(25)(34)
22.	$\alpha\beta\alpha^2\beta$	(13)	(13)	(14)	(14)	(24)
23.	$\alpha^2\beta\alpha^2\beta$	(12)(34)	(12)(35)	(12)(45)	(13)(45)	(23)(45)
24.	$\alpha^3\beta\alpha^2\beta$	(24)	(25)	(25)	(35)	(35)

b) Subgrupurile de ordinul 20 ale grupului S_5

Nr.	Elementele subgrupului	$H_1 = < (12345), (2453) >$	$H_2 = < (12435), (2453) >$	$H_3 = < (12453), (2435) >$	$H_4 = < (12543), (2534) >$	$H_5 = < (12534), (2543) >$	$H_6 = < (13524), (3542) >$
1.	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε
2.	α	(12345)	(12435)	(12453)	(12543)	(12534)	(13524)
3.	α^2	(13524)	(14523)	(14325)	(15324)	(15423)	(15432)
4.	α^3	(14253)	(13254)	(15234)	(14235)	(13245)	(12345)
5.	α^4	(15432)	(15342)	(13542)	(13452)	(14352)	(14253)
6.	β	(2354)	(2453)	(2435)	(2534)	(2543)	(3542)
7.	β^2	(25)(34)	(25)(34)	(23)(45)	(23)(45)	(24)(35)	(25)(34)
8.	β^3	(2453)	(2354)	(2534)	(2435)	(2345)	(2453)
9.	$\alpha\beta$	(1325)	(1425)	(1423)	(1523)	(1524)	(1534)
10.	$\alpha^2\beta$	(1534)	(1543)	(1345)	(1354)	(1453)	(1452)
11.	$\alpha^3\beta$	(1243)	(1234)	(1254)	(1245)	(1235)	(1325)
12.	$\alpha^4\beta$	(1452)	(1352)	(1532)	(1432)	(1342)	(1243)
13.	$\alpha\beta^2$	(15)(24)	(15)(23)	(13)(25)	(13)(24)	(14)(23)	(14)(23)
14.	$\alpha^2\beta^2$	(14)(23)	(13)(24)	(15)(24)	(14)(25)	(13)(25)	(12)(35)
15.	$\alpha^3\beta^2$	(13)(45)	(14)(35)	(14)(35)	(15)(34)	(15)(34)	(15)(24)
16.	$\alpha^4\beta^2$	(12)(35)	(12)(45)	(12)(34)	(12)(35)	(12)(45)	(13)(45)
17.	$\alpha\beta^3$	(1435)	(1345)	(1543)	(1453)	(1354)	(1254)
18.	$\alpha^2\beta^3$	(1254)	(1524)	(1235)	(1234)	(1243)	(1342)
19.	$\alpha^3\beta^3$	(1523)	(1524)	(1324)	(1325)	(1425)	(1435)
20.	$\alpha^4\beta^3$	(1342)	(1432)	(1452)	(1542)	(1532)	(1523)

c) Subgrupurile de ordinul 12 ale grupului S_5

Subgrupurile izomorfe grupului A_4

	ε	α	β	b^2	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$\beta\alpha$	$\beta^2\alpha$	$\alpha\beta\alpha$	$\alpha\beta^2\alpha$	$\beta\alpha\beta^2$	$\beta^2\alpha\beta$
H_1	ε	$(12)(34)$	(123)	(132)	(134)	(234)	(243)	(143)	(142)	(124)	(13)(24)	(14)(23)
H_2	ε	$(12)(35)$	(123)	(132)	(135)	(235)	(253)	(153)	(152)	(125)	(13)(25)	(15)(23)
H_3	ε	$(12)(45),$	(124)	(142)	(145)	(245)	(254)	(154)	(152)	(125)	(14)(25)	(15)(24)
H_4	ε	$(13)(45)$	(134)	(143)	(145)	(345)	(354)	(154)	(153)	(135)	(14)(35)	(15)(34)
H_5	ε	$(23)(45)$	(234)	(243)	(245)	(345)	(354)	(254)	(253)	(235)	(24)(35)	(25)(34)

Subgrupurile de ordinul 12 izomorfe $S_2 \times S_3$: $H_i =< \alpha, \beta, \gamma >, i = \overline{6,15}$

	H_6	H_7	H_8	H_9	H_{10}	H_{11}	H_{12}	H_{13}	H_{14}	H_{15}
ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε
α	(123)	(124)	(134)	(234)	(125)	(135)	(145)	(235)	(245)	(345)
α^2	(132)	(142)	(143)	(243)	(152)	(153)	(154)	(253)	(254)	(354)
β	(12)	(12)	(13)	(23)	(12)	(13)	(14)	(23)	(24)	(34)
γ	(45)	(35)	(25)	(15)	(34)	(24)	(23)	(14)	(13)	(12)
$\alpha\beta$	(23)	(24)	(34)	(34)	(25)	(35)	(45)	(35)	(45)	(45)
$\alpha^2\beta$	(13)	(14)	(14)	(24)	(15)	(15)	(15)	(25)	(25)	(35)
$\gamma\alpha$	(123)(45)	(124)(35)	(134)(25)	(15)(234)	(125)(34)	(135)(24)	(145)(23)	(14)(235)	(13)(245)	(12)(345)
$\gamma\alpha^2$	(132)(45)	(142)(35)	(143)(25)	(15)(243)	(152)(34)	(153)(24)	(154)(23)	(14)(253)	(13)(254)	(12)(354)
$\beta\gamma$	(12)(45)	(12)(35)	(13)(25)	(15)(23)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)	(14)(23)	(13)(24)	(12)(34)
$\alpha\beta\gamma$	(23)(45)	(24)(35)	(25)(34)	(15) (34)	(25)(34)	(24)(35)	(23)(45)	(14)(35)	(13)(45)	(12)(45)
$\alpha^2\beta\gamma$	(13)(45)	(14)(35)	(14)(25)	(15)(24)	(15)(34)	(15)(24)	(15)(23)	(14)(25)	(13)(25)	(12)(35)

d) Subgrupurile de ordinul 8 ale grupului S_5

$$H_i = \langle \alpha, \beta \rangle \cong D_8, i = \overline{1,15}$$

	ε	α	α^2	α^3	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha^3\beta$
H_1	ε	(1234)	(13)(24)	(1432)	(13)	(12)(34)	(24)	(14)(23)
H_2	ε	(1243)	(14)(23)	(1342)	(14)	(12)(34)	(23)	(13)(24)
H_3	ε	(1324)	(12)(34)	(1423)	(12)	(13)(24)	(34)	(14)(23)
H_4	ε	(1235)	(13)(25)	(1532)	(13)	(12)(35)	(25)	(15)(23)
H_5	ε	(1253)	(15)(23)	(1352)	(15)	(12)(35)	(23)	(13)(25)
H_6	ε	(1325)	(12)(35)	(1523)	(12)	(13)(25)	(35)	(15)(23)
H_7	ε	(1245)	(14)(25)	(1542)	(14)	(12)(45)	(25)	(15)(24)
H_8	ε	(1254)	(15)(24)	(1452)	(15)	(12)(45)	(24)	(14)(25)
H_9	ε	(1425)	(12)(45)	(1524)	(12)	(14)(25)	(45)	(15)(24)
H_{10}	ε	(1345)	(14)(35)	(1543)	(14)	(13)(45)	(35)	(15)(34)
H_{11}	ε	(1354)	(15)(34)	(1453)	(15)	(13)(45)	(34)	(14)(35)
H_{12}	ε	(1435)	(13)(45)	(1534)	(13)	(14)(35)	(45)	(15)(34)
H_{13}	ε	(2345)	(24)(35)	(2543)	(24)	(23)(45)	(35)	(25)(34)
H_{14}	ε	(2354)	(25)(34)	(2453)	(25)	(23)(45)	(34)	(24)(35)
H_{15}	ε	(2435)	(23)(45)	(2534)	(23)	(24)(35)	(45)	(25)(34)

e) Subgrupurile de ordinul 6 ale grupului S_5

e₁) Subgrupurile de ordinul 6 ale grupului S_5, izomorfe cu Z_6, $H_i = \langle \alpha \rangle, i = \overline{1,10}$

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	H_9	H_{10}
ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε
α	(123)(45)	(124)(35)	(125)(34)	(134)(25)	(135)(24)	(145)(23)	(234)(15)	(235)(14)	(245)(13)	(345)(12)
α^2	(132)	(142)	(152)	(143)	(153)	(154)	(243)	(253)	(254)	(354)
α^3	(45)	(35)	(34)	(25)	(24)	(23)	(15)	(14)	(13)	(12)
α^4	(123)	(124)	(125)	(134)	(135)	(145)	(234)	(235)	(245)	(345)
α^5	(132)(45)	(142)(35)	(152)(34)	(143)(25)	(153)(24)	(154)(23)	(234)(15)	(253)(14)	(254)(13)	(354)(12)

e₂) Subgrupurile de ordinul 6 ale grupului S_5, izomorfe cu S_3, $H_i = \langle \alpha, \beta \rangle, i = \overline{11,20}$

	H_{11}	H_{12}	H_{13}	H_{14}	H_{15}	H_{16}	H_{17}	H_{18}	H_{19}	H_{20}
ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε
α	(123)	(124)	(134)	(125)	(135)	(145)	(234)	(235)	(245)	(345)
β	(12)	(12)	(13)	(12)	(13)	(14)	(23)	(23)	(24)	(34)
α^2	(132)	(142)	(143)	(152)	(153)	(154)	(243)	(253)	(254)	(354)
$\alpha\beta$	(23)	(24)	(34)	(25)	(35)	(45)	(34)	(35)	(45)	(45)
$\alpha^2\beta$	(13)	(14)	(14)	(15)	(15)	(15)	(24)	(25)	(25)	(35)

e₃) Sub grupurile de ordinul 6 ale grupului S_5, izomorfe cu S_3, $H_i = \langle \alpha, \beta \rangle, i = \overline{21,30}$

	H_{21}	H_{22}	H_{23}	H_{24}	H_{25}	H_{26}	H_{27}	H_{28}	H_{29}	H_{30}
ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε
α	(123)	(124)	(125)	(134)	(135)	(145)	(234)	(235)	(245)	(345)
β	(12)(45)	(12)(35)	(12)(34)	(13)(25)	(13)(24)	(14)(23)	(23)(15)	(23)(14)	(13)(24)	(34)(12)
α^2	(132)	(142)	(152)	(143)	(153)	(154)	(243)	(253)	(254)	(354)
$\alpha\beta$	(23)	(24)	(25)	(34)	(35)	(45)	(34)	(35)	(45)	(45)
$\alpha^2\beta$	(13)	(14)	(15)	(14)	(15)	(15)	(24)	(25)	(25)	(35)

Anexa 3. Forma generală a operației T-quasigrupului binar cu un număr dat exact k de parastrofi distincți și ortogonali, unde $\boldsymbol{k} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{6}\}$

Fie (Q, A) un T-quasigrup binar cu T-grupul (Q, +). În tabelul de mai jos sunt date condițiile necesare și suficiente ca un T-quasigrup binar să posede exact k parastrofi distincți, precum și exemple de astfel de quasigrupuri

N/o	k (numărul exact de parastrofi distincți)	Forma generală a operației $A(x_1, x_2)$	Condiții asupra automorfismelor și elementului c	Exemple
1.	1	$Ix_1 + Ix_2 + c$	$Ix = -x, \forall x \epsilon Q$	(Q, A): $A(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$; (Z_n, A): $A(x_1, x_2) = \overline{n-1}x_1 + \overline{n-1}x_2$
2.	2	$\alpha x_1 + \alpha^{-1}x_2 + c$	$\alpha \neq I, \alpha^3 = I,\ \alpha c = Ic$	(Z_9, A): $A(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$
3.	3	$\alpha x_1 + \alpha x_2 + c$	$\alpha \neq I$	(Z_9, A): $A(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2$
4.		$Ix_1 + \alpha x_2 + c$		(Z_7, A): $A(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$
5.		$\alpha x_1 + Ix_2 + c$		(Z_5, A): $A(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$
6.	6	$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + c$	$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq I$ și $\alpha_1^2 \neq I\alpha_2$ sau $\alpha_2 \neq I\alpha_1$	(Z_5, A): $A(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$

Anexa 4. Forma generală a operației T-quasigrupului ternar cu un număr exact dat k de parastrofi distincți, unde $k \in \{1, 2, 3. 4, 6\}$

Fie (Q, A) un T-quasigrup ternar cu T-grupul (Q, +). În tabelul de mai jos sunt date condițiile necesare și suficiente ca un T-quasigrup ternar să posede exact k parastrofi distincți, precum și exemple de astfel de quasigrupuri

N/O	k (numărul exact de parastrofi distincți)	Forma generală a operației $A(x_1, x_2, x_3)$	Condiții asupra automorfismelo și elementului c	Exemplu
1)	1	$Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + c$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = I$	(Z_n, A): $A(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_2 - x_3$
2)	2	Nu există astfel de quasigrupuri		
3)	3	$\alpha x_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + c$	$\alpha \neq I,\ \alpha^2 = \varepsilon,\ \alpha c = Ic$	(Z_9, A): $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 8x_3$
4)		$\alpha x_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + c$		(Z_7, A): $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 6x_2 + x_3$
5)		$Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c$		(Z_{12}, A): $A(x_1, x_2, x_3) = 11x_1 + 5x_2 + 5x_3$
6)	4	$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c$	$\alpha \neq I$	(Z_3, A): $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$
7)		$\alpha x_1 + Ix_2 + Ix_3 + c$		(Z_4, A): $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + 3x_3$
8)		$Ix_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + c$		(Z_8, A): $A(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 + 2x_2 + 7x_3$
9)		$Ix_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + c$		(Z_6, A): $A(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 5x_2 + x_3$
10)	6	$\alpha x_1 + \alpha x_2 + Ix_3 + c$	$\alpha^2 \neq \varepsilon$	(Z_7, A): $A(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2$
11)		$\alpha x_1 + Ix_2 + \alpha x_3 + c$		(Z_5, A): $A(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2$
12)		$Ix_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c$		(Z_9, A): $A(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5$
13)		$\alpha x_1 + I\alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + c$	$\alpha^2 \neq \varepsilon,\ \alpha^4 = \varepsilon,\ \alpha c = Ic$	(Z_5, A): $A(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 3x_3$.
14)		$I\alpha^2 x_1 + \alpha^3 x_2 + \alpha x_3 + c$		(Z_{10}, A): $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 7x_2 + 3x_3$.
15)		$\alpha x_1 + \alpha^3 x_2 + I\alpha^2 x_3 + c$		(Z_{15}, A): $A(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 + 13x_2 + 11x_3$.
16)		$I\alpha\beta x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + c$	$\alpha c = Ic,\ \alpha c = Ic$	(Z_8, A): $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + 5x_3$.

Anexa 5. Parastrofii T-quasigrupului $\boldsymbol{n}$ −ar, $\boldsymbol{n} \in \{\mathbf{3},\mathbf{4}\}$

a) Parastrofii T-quasigrupului ternar

Fie(Q,A) un T-quasigrup ternar, cu T-forma $T = ((Q,+),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,c)$. Mulțimea parastrofilor acestui quasigrup este:

1) $A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha$,

2) ${}^{(12)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_2x_1 + \alpha_1x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha$;

3) ${}^{(13)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_3x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_1x_3 + \alpha$;

4) ${}^{(23)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1x_1 + \alpha_3x_2 + \alpha_2x_3 + \alpha$;

5) ${}^{(123)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_2x_1 + \alpha_3x_2 + \alpha_1x_3 + \alpha$;

6) ${}^{(132)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_3x_1 + \alpha_1x_2 + \alpha_2x_3 + \alpha$;

7) ${}^{(14)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1^{-1}(x_1 + I\alpha_2x_2 + I\alpha_3x_3 + I\alpha)$,

8) ${}^{(24)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_1x_1 + x_2 + I\alpha_3x_3 + I\alpha)$,

9) ${}^{(34)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_1x_1 + I\alpha_2x_2 + x_3 + I\alpha)$,

10) ${}^{(124)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_2x_1 + x_2 + I\alpha_3x_3 + I\alpha)$,

11) ${}^{(142)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_2^{-1}(x_1 + I\alpha_1x_2 + I\alpha_3x_3 + I\alpha)$,

12) ${}^{(134)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_3x_1 + I\alpha_2x_2 + x_3 + I\alpha)$,

13) ${}^{(143)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_3^{-1}(x_1 + I\alpha_2x_2 + I\alpha_1x_3 + I\alpha)$,

14) ${}^{(234)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_1x_1 + I\alpha_3x_2 + x_3 + I\alpha)$,

15) ${}^{(243)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_1x_1 + x_2 + I\alpha_2x_3 + I\alpha)$,

16) ${}^{(1234)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_2x_1 + I\alpha_3x_2 + x_3 + I\alpha)$,

17) ${}^{(1243)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_2x_1 + x_2 + I\alpha_1x_3 + I\alpha)$,

18) ${}^{(1324)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_3x_1 + x_2 + I\alpha_2x_3 + I\alpha)$,

19) ${}^{(1342)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_3x_1 + I\alpha_1x_2 + x_3 + I\alpha)$,

20) ${}^{(1423)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_2^{-1}(x_1 + I\alpha_3x_2 + I\alpha_1x_3 + I\alpha)$,

21) ${}^{(1432)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_3^{-1}(x_1 + I\alpha_1x_2 + I\alpha_2x_3 + I\alpha)$,

22) ${}^{(12)(34)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_2x_1 + I\alpha_1x_2 + x_3 + I\alpha)$,

23) ${}^{(13)(24)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_3x_1 + x_2 + I\alpha_1x_3 + I\alpha)$,

24) ${}^{(14)(23)}A(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1^{-1}(x_1 + I\alpha_3x_2 + I\alpha_2x_3 + I\alpha)$

b) Parastrofii T-quasigrupului 4-ar

Fie (Q, A) un T-quasigrup 4-ar, cu T-forma $T = ((Q,+), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c)$. Mulțimea parastrofilor acestui quasigrup este:

1) $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c,$

2) ${}^{(12)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + c,$

3) ${}^{(13)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 + c,$

4) ${}^{(14)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c,$

5) ${}^{(23)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_4 x_4 + c,$

6) ${}^{(24)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_4 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_2 x_4 + c,$

7) ${}^{(34)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_3 + \alpha_3 x_4 + c,$

8) ${}^{(12)(34)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_4 x_3 + \alpha_3 x_4 + c,$

9) ${}^{(13)(24)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_4 + c,$

10) ${}^{(14)(23)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_1 x_4 + c,$

11) ${}^{(123)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_4 x_4 + c,$

12) ${}^{(132)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_4 x_4 + c,$

13) ${}^{(124)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2 x_1 + \alpha_4 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_1 x_4 + c,$

14) ${}^{(142)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_2 x_4 + c,$

15) ${}^{(134)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_3 + \alpha_1 x_4 + c,$

16) ${}^{(143)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_4 + c,$

17) ${}^{(234)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_3 + \alpha_2 x_4 + c,$

18) ${}^{(243)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 + \alpha_4 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_4 + c,$

19) ${}^{(1234)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_3 + \alpha_1 x_4 + c,$

20) ${}^{(1432)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_4 + c,$

21) ${}^{(1243)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2 x_1 + \alpha_4 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_4 + c,$

22) ${}^{(1342)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_4 x_3 + \alpha_2 x_4 + c,$

23) ${}^{(1324)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_1 x_4 + c,$

24) ${}^{(1423)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_4 + c,$

25) ${}^{(15)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(x_1 + I\alpha_2 x_2 + I\alpha_3 x_3 + I\alpha_4 x_4 + Ic),$

26) $^{(25)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_2^{-1}(I\alpha_1x_1+x_2+I\alpha_3x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

27) $^{(35)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_3^{-1}(I\alpha_1x_1+I\alpha_2x_2+x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

28) $^{(45)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_4^{-1}(I\alpha_1x_1+I\alpha_2x_2+I\alpha_3x_3+x_4+Ic)$,

29) $^{(12)(35)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_3^{-1}(I\alpha_2x_1+I\alpha_1x_2+x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

30) $^{(12)(45)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_4^{-1}(I\alpha_2x_1+I\alpha_1x_2+I\alpha_3x_3+x_4+Ic)$,

31) $^{(13)(25)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_2^{-1}(I\alpha_3x_1+x_2+I\alpha_1x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

32) $^{(13)(45)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_4^{-1}(I\alpha_3x_1+I\alpha_2x_2+I\alpha_1x_3+x_4+Ic)$,

33) $^{(14)(25)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_2^{-1}(I\alpha_4x_1+x_2+I\alpha_3x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

34) $^{(14)(35)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_3^{-1}(I\alpha_4x_1+I\alpha_2x_2+x_3+I\alpha_1x_4+Ic)$,

35) $^{(15)(23)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_1^{-1}(x_1+I\alpha_3x_2+I\alpha_2x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

36) $^{(15)(24)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_1^{-1}(x_1+I\alpha_4x_2+I\alpha_3x_3+I\alpha_2x_4+Ic)$,

37) $^{(15)(34)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_1^{-1}(x_1+I\alpha_2x_2+I\alpha_4x_3+I\alpha_3x_4+Ic)$,

38) $^{(23)(45)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_4^{-1}(I\alpha_1x_1+I\alpha_3x_2+I\alpha_2x_3+x_4+Ic)$,

39) $^{(24)(35)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_3^{-1}(I\alpha_1x_1+I\alpha_4x_2+x_3+I\alpha_2x_4+Ic)$,

40) $^{(25)(34)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_2^{-1}(I\alpha_1x_1+x_2+I\alpha_4x_3+I\alpha_3x_4+Ic)$,

41) $^{(125)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_1^{-1}(I\alpha_2x_1+x_2+I\alpha_3x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

42) $^{(152)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_2^{-1}(x_1+I\alpha_1x_2+I\alpha_3x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

43) $^{(135)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_1^{-1}(I\alpha_3x_1+I\alpha_2x_2+x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

44) $^{(153)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_3^{-1}(x_1+I\alpha_2x_2+I\alpha_1x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

45) $^{(145)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_1^{-1}(I\alpha_4x_1+I\alpha_2x_2+I\alpha_3x_3+x_4+Ic)$,

46) $^{(154)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_4^{-1}(x_1+I\alpha_2x_2+I\alpha_3x_3+I\alpha_1x_4+Ic)$,

47) $^{(235)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_2^{-1}(I\alpha_1x_1+I\alpha_3x_2+x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

48) $^{(253)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_3^{-1}(I\alpha_1x_1+x_2+I\alpha_2x_3+I\alpha_4x_4+Ic)$,

49) $^{(245)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_2^{-1}(I\alpha_1x_1+I\alpha_4x_2+I\alpha_3x_3+x_4+Ic)$,

50) $^{(254)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_4^{-1}(\mathrm{I}\alpha_1x_1+x_2+I\alpha_3x_3+I\alpha_2x_4+Ic)$,

51) $^{(345)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_3^{-1}(I\alpha_1x_1+I\alpha_2x_2+I\alpha_4x_3+x_4+Ic)$,

52) $^{(354)}A(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_4^{-1}(I\alpha_1x_1+I\alpha_2x_2+x_3+I\alpha_3x_4+Ic)$,

53) $^{(1235)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_2 x_1 + I\alpha_3 x_2 + x_3 + I\alpha_4 x_4 + Ic)$,

54) $^{(1532)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(x_1 + I\alpha_1 x_2 + I\alpha_2 x_3 + I\alpha_4 x_4 + Ic)$,

55) $^{(1245)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_2 x_1 + I\alpha_4 x_2 + I\alpha_3 x_3 + x_4 + Ic)$,

56) $^{(1542)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(x_1 + I\alpha_1 x_2 + I\alpha_3 x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic)$,

57) $^{(1254)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_2 x_1 + x_2 + I\alpha_3 x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic)$,

58) $^{(1452)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_4 x_1 + I\alpha_1 x_2 + I\alpha_3 x_3 + x_4 + Ic)$,

59) $^{(1253)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_2 x_1 + x_2 + I\alpha_1 x_3 + I\alpha_4 x_4 + Ic)$,

60) $^{(1352)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_3 x_1 + I\alpha_1 x_2 + x_3 + I\alpha_4 x_4 + Ic)$,

61) $^{(1435)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_4 x_1 + I\alpha_2 x_2 + x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic)$,

62) $^{(1534)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(x_1 + I\alpha_2 x_2 + I\alpha_4 x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic)$,

63) $^{(1325)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_3 x_1 + x_2 + I\alpha_2 x_3 + I\alpha_4 x_4 + Ic)$,

64) $^{(1523)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(x_1 + I\alpha_3 x_2 + I\alpha_1 x_3 + I\alpha_4 x_4 + Ic)$,

65) $^{(1345)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_3 x_1 + I\alpha_2 x_2 + I\alpha_4 x_3 + x_4 + Ic)$,

66) $^{(1543)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(x_1 + I\alpha_2 x_2 + I\alpha_1 x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic)$,

67) $^{(1354)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_3 x_1 + I\alpha_2 x_2 + x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic)$,

68) $^{(1453)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_4 x_1 + I\alpha_2 x_2 + I\alpha_1 x_3 + x_4 + Ic)$,

69) $^{(1425)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_4 x_1 + x_2 + I\alpha_3 x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic)$,

70) $^{(1524)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(x_1 + I\alpha_4 x_2 + I\alpha_3 x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic)$,

71) $^{(2345)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_1 x_1 + I\alpha_3 x_2 + I\alpha_4 x_3 + x_4 + Ic)$,

72) $^{(2543)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_1 x_1 + x_2 + I\alpha_2 x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic)$,

73) $^{(2354)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_1 x_1 + I\alpha_3 x_2 + x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic)$,

74) $^{(2453)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_1 x_1 + I\alpha_4 x_2 + I\alpha_2 x_3 + x_4 + Ic)$,

75) $^{(2435)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_1 x_1 + I\alpha_4 x_2 + x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic)$,

76) $^{(2534)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_1 x_1 + x_2 + I\alpha_4 x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic)$,

77) $^{(12345)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_2 x_1 + I\alpha_3 x_2 + I\alpha_4 x_3 + x_4 + Ic)$,

78) $^{(12354)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_2 x_1 + I\alpha_3 x_2 + x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic)$,

79) $^{(12435)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_2 x_1 + I\alpha_4 x_2 + x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic)$,

80) $^{(12534)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_2 x_1 + x_2 + I\alpha_4 x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic)$,

81) $^{(12453)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_2 x_1 + I\alpha_4 x_2 + I\alpha_1 x_3 + x_4 + Ic)$,

82) $^{(12543)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_2 x_1 + x_2 + I\alpha_1 x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic)$,

83) $^{(13524)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_3 x_1 + I\alpha_4 x_2 + x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic)$,

84) $^{(13425)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_3 x_1 + x_2 + I\alpha_4 x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic)$,

85) $^{(13254)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_3 x_1 + x_2 + I\alpha_2 x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic)$,

86) $^{(13245)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_3 x_1 + I\alpha_4 x_2 + I\alpha_2 x_3 + x_4 + Ic)$,

87) $^{(13542)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_3 x_1 + I\alpha_1 x_2 + x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic)$,

88) $^{(13452)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_3 x_1 + I\alpha_1 x_2 + I\alpha_4 x_3 + x_4 + Ic)$,

89) $^{(14253)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_4 x_1 + x_2 + I\alpha_1 x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic)$,

90) $^{(14532)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_4 x_1 + I\alpha_1 x_2 + I\alpha_2 x_3 + x_4 + Ic)$,

91) $^{(14523)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_4 x_1 + I\alpha_3 x_2 + I\alpha_1 x_3 + x_4 + Ic)$,

92) $^{(14352)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_4 x_1 + I\alpha_3 x_2 + I\alpha_1 x_3 + x_4 + Ic)$,

93) $^{(14325)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_4 x_1 + x_2 + I\alpha_2 x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic)$,

94) $^{(14235)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_4 x_1 + I\alpha_3 x_2 + x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic)$,

95) $^{(15432)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(x_1 + I\alpha_1 x_2 + I\alpha_2 x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic)$,

96) $^{(15243)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(x_1 + I\alpha_4 x_2 + I\alpha_1 x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic)$,

97) $^{(15342)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(x_1 + I\alpha_1 x_2 + I\alpha_4 x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic)$,

98) $^{(15423)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(x_1 + I\alpha_3 x_2 + I\alpha_1 x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic)$,

99) $^{(15234)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(x_1 + I\alpha_3 x_2 + I\alpha_4 x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic)$,

100) $^{(15324)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(x_1 + I\alpha_4 x_2 + I\alpha_2 x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic)$,

101) $^{(123)(45)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_2 x_1 + I\alpha_3 x_2 + I\alpha_1 x_3 + x_4 + Ic)$,

102) $^{(132)(45)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_3 x_1 + I\alpha_1 x_2 + I\alpha_2 x_3 + x_4 + Ic)$,

103) $^{(142)(35)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(x_1 + I\alpha_1 x_2 + I\alpha_4 x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic)$,

104) $^{(124)(35)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_2 x_1 + I\alpha_4 x_2 + x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic)$,

105) $^{(125)(34)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_2 x_1 + x_2 + I\alpha_4 x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic)$,

106) $^{(152)(34)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(x_1 + I\alpha_1 x_2 + I\alpha_4 x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic)$,

107) $^{(15)(234)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(x_1 + I\alpha_3 x_2 + I\alpha_4 x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic),$

108) $^{(15)(243)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(x_1 + I\alpha_4 x_2 + I\alpha_2 x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic),$

109) $^{(14)(235)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_4\, x_1 + I\alpha_3 x_2 + x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic),$

110) $^{(14)(253)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_4 x_1 + x_2 + I\alpha_2 x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic),$

111) $^{(13)(254)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_3 x_1 + x_2 + I\alpha_1 x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic),$

112) $^{(13)(245)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_3 x_1 + I\alpha_4 x_2 + I\alpha_1 x_3 + x_4 + Ic),$

113) $^{(12)(345)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(I\alpha_2 x_1 + I\alpha_1 x_2 + I\alpha_4 x_3 + x_4 + Ic),$

114) $^{(12)(354)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(I\alpha_2 x_1 + I\alpha_1 x_2 + x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic),$

115) $^{(134)(25)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_3 x_1 + x_2 + I\alpha_4 x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic),$

116) $^{(143)(25)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^{-1}(I\alpha_4 x_1 + x_2 + I\alpha_1 x_3 + I\alpha_3 x_4 + Ic),$

117) $^{(135)(24)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_3 x_1 + I\alpha_4 x_2 + x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic),$

118) $^{(153)(24)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3^{-1}(x_1 + I\alpha_4 x_2 + I\alpha_1 x_3 + I\alpha_2 x_4 + Ic),$

119) $^{(145)(23)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1^{-1}(I\alpha_4 x_1 + I\alpha_3 x_2 + I\alpha_2 x_3 + x_4 + Ic),$

120) $^{(154)(23)}A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_4^{-1}(x_1 + I\alpha_3 x_2 + I\alpha_2 x_3 + I\alpha_1 x_4 + Ic),$

DECLARAŢIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnata, Rotari Tatiana, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări şi realizări ştiinţifice. Conştientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecinţele în conformitate cu legislaţia în vigoare.

Rotari Ratiana

Semnătura J. Rotari

Data 8 mai 2026

CURRICULUM VITAE

NUME, PRENUME: Rotari Tatiana
CETĂȚENIE: Moldoveancă
STUDII:
1. Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, Școala doctorală științe ale naturii, Octombrie 2024 – prezent,
Specialitatea: Logica matematică, algebră și teoria numerelor
2. Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți, Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului, Septembrie 2021 – Februarie 2023, specialitatea: Didactica mtematicii
Calificarea obținută: Master în Științe ale Educației
3. Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți, Facultatea Tehnică, Fizică, Matematică și Informatică, Septembrie 2001 – Iunie 2006, specialitatea: Matematică și Informatică
Calificarea obținută: Licențiat în Matematică

STAGII DE PRACTICĂ:
1. Practica de specialitate, Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți, Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului, Catedra de matematică și informatică, 2022
2. Practica de licență, Școala Profesională Nr. 2 din Bălți, 2006
3. Practica de producție: Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți, Comisia de admitere, 2005
DOMENII DE INTERES ȘTIINȚIFIC: Algebră, Teoria quasigrupurilor și a buclelor, Combinatorică.
PARTICIPĂRI ÎN PROIECTE ȘTIINȚIFICE NAȚIONALE ȘI INTERNAȚIONALE:
1. Program de Cercetare Instituțională 011303 “SATGED” (Structuri algebrice, diferențiale, geometrice și topologice și valorificarea lor în domeniile teoretice și aplicative), 2024 – 2027, Universitatea de Stat din Moldova.
2. Ianuarie 2018 – Decembrie 2018, Ianuarie 2019 – Decembrie 2019: Proiect instituțional de cercetăți aplicative 15.417.06.27A Dirijarea formării competențelor universitare prin organizarea unui process de instruire adaptive organizată
3. Ianuarie 2014 – Decembrie 2015. Development of quality assurance oh higher education in Moldova - QUAEM. Tempus Project TEMPUS 530537-TEMPUS-1-2-12-1-DE-TEMPUS-SMGR
PARTICIPĂRI CU COMUNICĂRI ÎN MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE NAȚIONALE ȘI INTERNAȚIONALE:
1. Conferința științifică internațională „Relevanța și calitatea formării universitare: competențe pentru present și viitor european”, consacrată aniversării de 80 de ani de la fondarea Universității de Stat „Alecu Russo” din Bălți, 3-4 octombrie 2025
2. The 32th International Conference on Applied and Industrial Mathematics, Bucharest, Romania, 18-21 September, 2025.
3. National conference with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations, State University of Moldova, September 18-19, 2025.
4. International Conference on Quasigroups and Related Systems (ConfQRS 2025), July 2 – 4, 2025, Chișinău, Republic of Moldova.
5. International Conference Mathematics & IT: Research and Education (MITRE– 2025), June 26– 29, 2025, Chișinău, Republic of Moldova.
6. International Conference dedicated to the 60th anniversary of the foundation of V. Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, October 10-13, 2024, Chișinău, Republic of Moldova.
7. Conferința științifică cu participare internațională. „Tradiție și inovare în cercetarea științifică”, Ediția a

XIII-a, Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți, 10-11 octombrie 2024.

8. International Scientific Conference Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2023), Chișinău, Republic of Moldova, 26 – 29 June, 2023.

9. Conferința științifico—practică cu participare internațională „Utilizarea tehnologiilor educaționale și informaționale moderne pentru formarea competențelor profesionale ale absolvenților instituțiilor de învățământ superior” (PROFADAPT_FCP), din Bălți, 6-7 decembrie 2019.

10. The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky, July 02-06, 2019. Vinnytsia, Ukraine.

11. Conferința științifico—practică cu participare internațională Utilizarea tehnologiilor educaționale și informaționale moderne pentru formarea competențelor profesionale ale absolvenților instituțiilor de învățământ superior (PROFADAPT_FCP), Bălți, 7-8 decembrie 2018.

12. International Conference on Mathematics, Informatics and Information Technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov (MITI-2018). Bălți, 2018

13. The XI International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko, July 03-07, 2017

14. Conferința științifico-practică cu participare internațională: COLLOQUIA PROFESORUM „Tradiție și inovare în cercetarea științifică”, Ediția a VII-a, Bălți, 2017

15. Conferința științifică cu participare internațională: COLLOQUIA PROFESORUM „Tradiție și inovare în cercetarea științifică”, Ediția a IV-a, Bălți, 2013

16. Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu, Chișinău, Republic of Moldova, 22 – 25 August, 2012.

17. International Workshop on Intelligent Information System: Proceeding IIS, Chișinău, 13-14 September, 2011.

18. International Scientific Conference “Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2011), Chișinău, Republic of Moldova, 22 – 25 August, 2011.

19. The 8-th International Algebraic Conference in Ukraine Dedicated to the memory of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko, Lugansk, 5-12 July, 2011

20. X Международного семинара Дискретная математика и ее приложения. Москва, 1-6 февраля 2010

21. International Scientific Conference “Mathematics & IT: Research and Education” (MITRE-2009), Chișinău, Republic of Moldova, 8 – 9 octombrie, 2009

22. The 7-th International Algebraic Conference in Ukraine. Kharkov, 18-23 August, 2009

LUCRĂRI ȘTIINȚIFICE ȘI ȘTIINȚIFICO – METODICE PUBLICATE:

6 articole în reviste științifice de specialitate acreditate, 4 articole in culegeri ale conferințelor internaționale de specialitate, 17 rezumate ale comunicărilor la conferințe științifice de specialitate internaționale și naționale, 23 participari la conferințe și seminare științifice de specialitate naționale și internaționale.

a. Articole în reviste științifice de specialitate acreditate:

1. Rotari Tatiana, Syrbu Parascovia. On-T-quasigroups with exactly 20 distinct parastrophes. Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat., 2025, No. 1 (107), p. 107-119

2. Beleavscaia Galina; Popovici Tatiana. Near-totally conjugate orthogonal quasigroups. In: Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica. 2014, nr. 3(76), pp. 89-96. ISSN 1024-7696.

3. Belyavskaya G. B., Popovich T. V. Totally conjugate orthogonal quasigroups and complete graphs. Journal of Mathematical Sciences, 2012, 185, No. 2, 184–191.

4. Belyavskaya Galina, Popovich Tatiana. Conjugate sets of loops and quasigroups. DC-quasigroups. Bul. Acad. Științe al R.M. Matematica, 2012, Nr. 1(68), Chișinău, IMI, p. 21-31

5. Popovich T. On conjugate sets of quasigroups. Bul. Acad. Științe al R.M. Matematica, 2011, Nr. 3(67), Chișinău, IMI, p. 69-76

6. Белявская Г. Б., Попович, Т. В. Тотально парастрофно-ортогональные квазигруппы и полные графы. Фундаментальная и прикладная математика. Москва, 2010, том 16, выпуск 8. стр. 17-26

b. Articole in culegeri de lucrări ale conferințelor științifice de specialitate

1. Syrbu P**,** Rotari T. On Self-Orthogonal n-ary Quasigroups. Proceedings of the International Conference dedicated to the 60th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, October 10-13, 2024, Chișinău, Republic of Moldova, p. 126 – 131.

2. Popovich T. *On near-conjugate-orthogonal quasigroups*. Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, August 19-23, 2014, Chisinau, Republic of Moldova, p. 150-153

3. Белявская, Г. Б. Попович, Т. В. О графах, связанных с квазигруппами. Topics in graph theory. A tribute to A. A. and T. E. Zykovs on the occasions of A. A. Zykov's 90th birthday. University of Illinois at Urbana-Champaign, 2013. – p. 187-193.

4. Popovich T. Conjugate-orthogonal Quasigroups and Graphs. International Workshop on Intelligent Information System: Proceeding IIS (Chișinău, 13-14 September, 2011)- p.256-259

c. Rezumate ale comunicărilor la conferințe științifice de specialitate internaționale și naționale:

1. Rotari T. Ternary quasigoups with exactly four distinct parastrophes, which are orthogonal. In Abstracts of the National conference with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations, State University of Moldova, September 18-19, 2025, Chișinău, Republica Moldova, pp. 227

2. Rotari Tatiana, Syrbu Parascovia. On 4-quasigroups with exactly five distinct parastrophes. Abstracts of the International Conference on Quasigroups and Related Systems (ConfQRS 2025), July 2 – 4, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 33

3. Rotari Tatiana, Syrbu Parascovia. On 4-quasigroups with exactly ten distinct parastrophes. Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE 2025), Moldova State University, 26-29 iunie 2025, Chișinău, Republica Moldova, pp. 24

4. Rotari Tatiana, Syrbu Parascovia. On *n*-ary T−quasigroups with a prescribed maximum number of distinct parastrophes. The 32st International Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2025, Universitatea Politehnica din București, Romania, 18-21 septembrie 2025 pp. 99

5. Rotari Tatiana. On ternary quasigroups with exactly three distinct and orthogonal parastrophes. The 31st Conference on Applied and Industrial Mathematics, September 19-22, 2024 in Oradea, Romania, 2024, p. 64

6. Syrbu Parascovia, Rotari Tatiana. On self-orthogonal finite n-ary quasigroups. The 31st Conference on Applied and Industrial Mathematics, September 19-22, 2024 in Oradea, Romania, 2024, pp. 63 ISSN 2537-2688

7. Rotari Tatiana. Parastrophes of ternary quasigroups and their orthogonality. Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education". Chișinău, Moldova, MITRE-2023. -p. 32 p

8. Rotari Tatiana. On the conjugate sets of IP-quasigroups. The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky, July 02-06, 2019. Vinnytsia, Ukraine. p. 94-95

9. Popovici T, Shcherbacov V. Parastroph-orthogonality of alinear quasigroups. The XI International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko, July 03-07, 2017. Kyiv, Ukraine. p. 104

10. Popovich Tatiana. Orthogonal sets of conjugates of T-quasigroups. Conference on Applied and Industrial Mathematics Dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu. Chișinău, 22-25 August, 2012- p.187-188

11. Popovich Tatiana. On the conjugate sets of quasigroups and identities. Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE-2011) (Chișinău, 22-25

August, 2011)- p. 95-96
12. Belyavskaya Galina, Popovich Tatiana. On the classes of quasigroups defined by the conjugate sets. Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE-2011), Chișinău, 22-25 August, 2011)- p.8-9
13. Popovich T. On sets of conjugates of quasigroups. Abstracts of the 8-th International Algebraic Conference in Ukraine Dedicated to the memory of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko, Lugansk, 5-12 July, 2011. - p.269
14. Belyavskaya G.B., Popovich T.V. *A*bout quasigroups with distinct conjugates. Book of abstracts of the 8-th International Algebraic Conference in Ukraine Dedicated to the memory of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko, Lugansk, 5-12 July, 2011.- p.247
15. Попович Т. О парастрофно-ортогональных квазигруппах и графах. В материалы X Международного семинара Дискретная математика и ее приложения. (Москва, 1-6 февраля 2010), стр. 258-260
16. Belyavskaya G., Popovich T. On totally and near-totally conjugate-orthogonal quasigroups. Abstracts of the International Scientific Conf. "Mathematics & IT: Research and Education", Chișinău, 8-9 October, 2009 - p. 3-4
17. Belyavskaya Galina, Popovich Tatiana. Totally conjugate-orthogonal quasigroups. Abstracts of the 7-th International Algebraic Conference in Ukraine. Kharkov, 18-23 August, 2009 - p. 26-27

PREMII, MENȚIUNI, DISTINCȚII, TITLURI ONORIFICE:

1. Diplomă de excelență pentru cea mai bună teză de master „Integrarea tehnologiilor informaționale și comunicaționale în procesul de învățare-evaluare a elementelor de analiză matematică în formarea inițială a profesorilor de matematică", USARB, 2023.
2. Diplomă de excelență pentru rezultate academice obținute în cadrul programului de studii Didactica matematicii, USARB, 2023.
3. Premiul Institutului de Matematică și Informatică „Vladimir Andrunachievici" oferit în cadrul The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to 50^{th} anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science, 19-23 august 2014, pentru cea mai bună lucrare științifică a tinerilor cercetători.

APARTENENȚĂ LA SOCIETĂȚI / ASOCIAȚII ȘTIINȚIFICE NAȚIONALE ȘI INTERNAȚIONALE:

1. Membru ROMAI (The Romanian Society of Applied and Industrial Mathematics), Septembrie 2025 – prezent.

CUNOAȘTEREA LIMBILOR:

Limbi materne: Româna
Alte limbi:

	ÎNȚELEGERE		VORBIRE		SCRIERE
	Ascultare	Citire	Interacțiunea vorbită	Producție vorbită	
Franceză	B1	B1	A2	A2	A2
Rusă	B1	B1	B1	B1	B1

DATE DE CONTACT DE SERVICIU:

Adresa: Str. Pușkin 38, Bălți, MD – 3100, Moldova
Telefon: +373 23152488, +373 96320979
Email: tatiana.rotari@usarb.md