UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
ȘCOALA DOCTORALĂ ȘTIINȚE ALE NATURII

Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 512.548 (043.2)

ROTARI TATIANA

QUASIGRUPURI CU PARASTROFII DISTINCȚI ORTOGONALI

111.03. Logică matematică, algebră și teoria numerelor

Rezumatul tezei de doctor în științe matematice

Chișinău, 2026

Teza a fost elaborată în cadrul Departamentului Matematică, Universitatea de Stat din Moldova, Școala Doctorală Științe ale Naturii

Conducător științific-

SÎRBU Parascovia	doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar, Universitatea de Stat din Moldova

Componența Comisiei de susținere publică a tezei de Doctorat:

RUSU Andrei	doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar, Institutul de Matematică și Informatică ”V. Andrunachievici”, Universitatea de Stat din Moldova – ***președinte***
SÎRBU Parascovia	doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar, Universitatea de Stat din Moldova **- *conducător științific***
IZBAȘ Vladimir	doctor în științe fizico-matematice, conferențiar cercetător, Institutul de Matematică și Informatică ”V. Andrunachievici”, Universitatea de Stat din Moldova - ***referent***
SOKHATSKY Fedir	doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU, Ucraina - ***referent***
CHIRIAC Liubomir	doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar, Universitatea Pedagogică de Stat Ion Creangă din Chișinău - ***referent***

Susținerea tezei va avea loc la 23.06.2026, ora 14^{00} în cadrul Ședinței Comisiei de susținere publică, Școala Doctorală Științe ale Naturii, USM.
Sediul – Universitatea de Stat din Moldova, str. A. Mateevici 60, blocul 4, sala 222, MD-2009, Chișinău, Moldova.

Teza de doctor și rezumatul pot fi consultate la Biblioteca Națională a Republicii Moldova, Biblioteca Centrală a Universității de Stat din Moldova (MD-2009, mun. Chișinău, str. A. Mateevici 60), pe pagina web a ANACEC (http://www.anacec.md)

Rezumatul a fost expediat la 07. 05. 2026

Președintele Comisiei de Doctorat doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar	**RUSU Andrei**
Conducător științific doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar	**SÎRBU Parascovia**
Autor:	**ROTARI Tatiana**

Cuprins

1. REPERE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea și importanța temei abordate. Noțiunea algebrică analogică celei de quasigrup își are originile în lucrările lui Anton K. Suschkewitsch, care a publicat în 1929 lucrări despre „generalizarea legii asociative” și a studiat sisteme binare neasociative [19]. Termenul „quasigrup” a fost introdus de către Ruth Moufang în anul 1935, care prin studiile sale asupra planelor desarguesiane a inițiat dezvoltarea teoriei quasigrupurilor ca domeniu al algebrei neasociative [2, 13, 14].

Conceptul de parastrof a fost introdus de A. Sade în anii 1950 [15]. Un quasigrup $n-$ar are $(n+1)!$ parastrofi, iar unii dintre ei, sau chiar toți, pot să coincidă ca operații algebrice. C.C.Lindner și D. Steedley [10] au arătat că numărul exact de parastrofi distincți ai unui quasigrup binar divide 3! și că există quasigrupuri binare cu exact 1, 2, 3 sau 6 parastrofi distincți, caracterizând integral spectrul quasigrupurilor binare finite cu un număr exact dat de parastrofi distincți. Ulterior, M. McLeish [11] a generalizat acest rezultat în caz $n-$ar, arătând că numărul exact de parastrofi distincți ai unui quasigrup $n-$ar divide $(n+1)!$ și a studiat existența quasigrupurilor ternare cu un număr exact dat de parastrofi distincți. În legătură cu aceste aspecte apare problema caracterizării spectrului unor astfel de $n-$quasigrupuri. În caz ternar, această problemă a fost soluționată de către M. McLeish, complet pentru quasigrupurile finite cu exact 1, 3, 4, 6, 12 sau 24 de parastrofi distincți, și parțial pentru cele cu 2 sau 8 parastrofi distincți [11, 12]. M. McLeish a obținut de asemenea o serie de estimări ale spectrului quasigrupurilor de aritate arbitrară finită n, cu un număr exact dat de parastrofi distincți [11], însă caracterizarea completă a spectrului este în prezent o problemă deschisă.

Una din abordările utilizate la caracterizarea spectrului quasigrupurilor $n-$are finite cu un număr dat de parastrofi distincți constă în utilizarea în acest scop a quasigrupurilor liniare, în particular a $T-$quasigrupurilor. Astfel apare problema caracterizării quasigrupurilor liniare care au un număr exact dat de parastrofi distincți. Această problemă a fost soluționată în caz binar, pentru quasigrupurile liniare peste grupuri abeliene, de G. Belyavskaya și T. Popovich (T. Rotari) [3-6]. Este de menționat că M. McLeish a utilizat și quasigrupurile liniare pentru a demonstra existența și a caracteriza spectrul quasigrupurilor ternare cu un număr exact dat de parastrofi distincți. Totuși, McLeish nu a prezentat astfel de caracterizări în cazul a exact k parastrofi distincți, pentru orice divizor k al numărului 24.

Ulterior, F. Sokhatsky și Y. Pirus [17, 18] au obținut caracterizări ale quasigrupurilor ternare (Q, A), $A(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c$, liniare peste un grup $(Q, +, 0)$, unde 0 este elementul neutru al grupului, α_1, α_2 și α_3 sunt bijecții pe mulțimea Q, cu condiția $\alpha_i 0 =$

$0, i = 1, 2, 3,$ care posedă cel mult un număr dat k de parastrofi distincți, unde k este divizor al numărului 24. În particular, F. Sokhatsky și Y. Pirus au arătat că nu există quasigrupuri ternare liniare (de tipul dat) cu exact doi parastrofi distincți. Menționăm că rezultatele din [17, 18] se referă la cazul când un quasigrup ternar posedă cel mult (nu exact) k parastrofi distincți.

În teza prezentă sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T-$quasigrup $n-$ar ($n = 2, 3, 4$) să posede un număr exact dat de parastrofi distincți și sunt date estimări ale spectrului unor astfel de quasigrupuri în caz finit.

Un alt aspect studiat în acest context ține de caracterizarea spectrului quasigrupurilor $n-$are, parastrofii distincți ai cărora formează un sistem ortogonal. Problema ortogonalității operațiilor binare a apărut inițial în combinatorică (ortogonalitatea pătratelor latine) fiind impulsionată de cunoscuta ipoteză a lui Euler despre inexistența pătratelor latine ortogonale de ordinul $n \equiv 2\ (mod\ 4)$ care a fost soluționată definitiv (negativ) de către R. C. Bose, S. S. Shrikhande și E. T. Parker în 1960 [7]. Soluția definitivă a ipotezei lui Euler arăta că există pătrate latine ortogonale de orice ordin $q \neq 1, 2, 6$. Soluționarea acestei ipoteze a condus la apariția unor domenii noi de cercetare în combinatorică și algebră cum ar fi, de exemplu, teoria operațiilor ortogonale, abordată inițial de T. Mann, V. Belousov, C. Stein, T. Evans ș.a. care, necesitând diverse metode de construcție, s-a dezvoltat în multiple direcții [8].

O direcție aparte în teoria operațiilor ortogonale o reprezintă studiul ortogonalității parastrofilor unui quasigrup $n-$ar [1, 20]. Quasigrupurile $n-$are care posedă seturi ortogonale din n parastrofi (parastrofi principali) se numesc quasigrupuri parastrofic-ortogonale (auto-ortogonale), iar quasigrupurile $n-$are, toți parastrofii distincți ai cărora formează un sistem ortogonal, se numesc quasigrupuri total parastrofic-ortogonale. Elaborarea metodelor de construcție a quasigrupurilor $n-$are parastrofic-ortogonale, respectiv total parastrofic-ortogonale, este un instrument eficient pentru caracterizarea spectrului unor astfel de quasigrupuri.

O problemă care apare în acest context este caracterizarea quasigrupurilor liniare, în particular a $T-$quasigrupurilor, ce posedă un număr exact dat de parastrofi distincți ortogonali. O noțiune analogică celei de quasigrup total parastrofic-ortogonal, a apărut inițial în caz binar, fiind introdusă de autoarea tezei în colaborare cu G. Belyavskaya, unde quasigrupurile cu cei 6 parastrofi ortogonali au fost numite *totCO − quasigrupuri (total conjugate − orthogonal quasigroups)* [4].

Quasigrupurile ternare mediale parastrofic−ortogonale au fost studiate de I. Fryz și F.Sokhatsky [9, 16], care au stabilit condiții necesare și suficiente ca un quasigrup ternar medial să posede sisteme ortogonale, respectiv puternic ortogonale din șase (toți) parastrofi principali, și au demonstrat că, pentru orice $n > 3$, nu există quasigrupuri $n -$are mulțimea parastrofilor principali ai cărora formează un sistem puternic ortogonal.

Operațiile ortogonale, în particular quasigrupurile ortogonale (parastrofic-ortogonale, auto-ortogonale) au numeroase aplicări în criptografie, teoria codurilor, combinatorică ș. a. [8].

Scopul și obiectivele tezei. Scopul tezei constă în obținerea unor caracterizări ale quasigrupurilor $n -$are $(n = 2, 3, 4)$, ce posedă un număr exact dat de parastrofi distincți, în particular ale quasigrupurilor total parastrofic-ortogonale, precum și estimarea spectrului acestor quasigrupuri. Pentru realizarea scopului tezei au fost formulate următoarele **obiective:**

- determinarea seturilor maximale de parastrofi distincți ai unui quasigrup $n -$ar ($n = 2$, $3, 4$), utilizând subgrupurile grupului S_n;
- caracterizarea $T -$formei $T -$quasigrupurilor cu un număr exact dat de parastrofi distincți, inclusiv în cazul când aceștea formează un sistem ortogonal;
- obținerea unor estimări ale spectrului quasigrupurilor $n -$are ($n = 2, 3, 4$) finite, ce au un număr exact dat de parastrofi distincți, inclusiv ortogonali.

Noutatea și originalitatea științifică. În lucrare sunt introduse două clase noi de quasigrupuri binare: $DC -$ quasigrupuri (quasigrupuri binare care au șase parastrofi distincți) și $totCO -$quasigrupuri (quasigrupuri binare cei șase parastrofi ai cărora formează un sistem ortogonal). Problema existenței quasigrupurilor ce posedă un număr dat de parastrofi distincți și a caracterizării spectrului lor, formulată de C.C. Lindner și D. Steedly, este considerată pentru clasa $T -$quasigrupurilor $n -$are ($n = 2, 3, 4$), inclusiv cu sistemele maximale ortogonale de parastrofi distincți.

Problema științifică importantă soluționată în domeniul respectiv constă în caracterizarea quasigrupurilor binare ce posedă 6 parastrofi distincți, respectiv 6 parastrofi ortogonali, în descrierea $T -$ quasigrupurilor binare cu exact 1, 2, 3 sau 6 parastrofi distincți, a $T -$quasigrupurilor ternare cu exact 3, 4 sau 6 parastrofi distincți și a $T -$quasigrupurilor $4 -$are cu exact 1, 5, 10 sau 20 de parastrofi distincți, estimarea spectrului lor, determinarea unor condiții necesare și suficiente ca sistemele maximale de parastrofi distincți să fie ortogonale, precum și demonstrarea inexistenței $T -$quasigrupurilor $4 -$are cu exact 2, 6 sau 15 parastrofi distincți.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele referitoare la $T -$formele $T -$quasigrupurilor $n -$are cu un număr exact dat de parastrofi distincți, inclusiv ortogonali, cât și metodele propuse de construcție a $n -$ quasigrupurilor parastrofic-ortogonale, reprezintă contribuții la soluționarea problemelor deschise despre existența n −quasigrupurilor cu un număr dat de parastrofi distincți și spectrul n −quasigrupurilor parastrofic-ortogonale.

Aprobarea rezultatelor științifice. Rezultatele științifice au fost prezentate în cadrul a opt sesiuni speciale a Seminarului „Algebră și Logică matematică”, dedicat memoriei Profesorului Valentin Belosov, Institutul de Matematică și Informatică „Vladimir Andrunachievici”. De asemenea, rezultatele incluse în teză au fost prezentate la 17 conferințe de specialitate, dintre care 7 conferințe internaționale de specialitate în afara Republicii Moldova:

- The 32th International Conference on Applied and Industrial Mathematics, Bucharest, Romania, 18-21 September, 2025;
- The 31th International Conference on Applied and Industrial Mathematics, Oradea, Romania, 19-22 September, 2024;
- The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky, July 02-06, 2019, Vinnytsia, Ukraine;
- The XI International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko, July 03-07, 2017, Kyiv, Ukraine
- The 8-th International Algebraic Conference in Ukraine Dedicated to the memory of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko, Lugansk, 5-12 July, 2011;
- X Международный семинар „Дискретная математика и ее приложения”, Москва, 1-6 февраля 2010;
- The 7-th International Algebraic Conference in Ukraine. Kharkov, 18-23 August, 2009;
- International Conference on Quasigroups and Related Systems (ConfQRS 2025), July 2 – 4, 2025, Chișinău, Republic of Moldova;
- International Conference Mathematics & IT: Research and Education (MITRE– 2025), June 26– 29, 2025, Chișinău, Republic of Moldova;
- International Conference dedicated to the 60th anniversary of the foundation of V. Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, October 10-13, 2024, Chișinău, Republic of Moldova;
- International Scientific Conference Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2023), Chișinău, Republic of Moldova, 26 – 29 June, 2023;
- Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu, Chișinău, Republic of Moldova, 22 – 25 August, 2012;
- International Scientific Conference “Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2011), Chișinău, Republic of Moldova, 22 – 25 August, 2011;

- International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE-2009), Chișinău, Republic of Moldova, 8 – 9 octombrie, 2009;
- Conferința științifică internațională „Relevanța și calitatea formării universitare: competențe pentru present și viitor european", consacrată aniversării de 80 de ani de la fondarea Universității de Stat „Alecu Russo" din Bălți, 3-4 octombrie 2025;
- National conference with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations, State University of Moldova, September 18-19, 2025;
- International Workshop on Intelligent Information System: Proceeding IIS, Chișinău, 13-14 September, 2011.

Publicații la tema tezei. La tema tezei au fost publicate în total 27 de lucrări științifice, inclusiv 10 articole, dintre care 6 articole în reviste științifice recenzate de specialitate, 4 articole publicate în culegeri de articole (Proceedings) și 17 rezumate la conferințe științifice.

Structura și volumul tezei. Teza este scrisă în limba română și conține: introducere, patru capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie cu 162 titluri și 5 anexe. Teza conține 150 pagini, inclusiv 112 pagini cu text de bază.

Cuvinte-cheie: quasigrup $n-$ar, parastrof, quasigrup liniar, $T-$quasigrup, quasigrup (total) parastrofic-ortogonal, DC $-$quasigrup, $totCO$ $-$quasigrup.

2. CONȚINUTUL TEZEI

Lucrarea este structurată în patru capitole, Introducere, Concluzii generale și recomandări, Bibliografie și 5 anexe.

În primul capitol - **Analiza bibliografiei în domeniul teoriei quasigrupurilor cu un număr dat de parastrofi distincți,** este prezentată o analiză a rezultatelor cunoscute care se referă la tema tezei. Se arată că numărul maximal de parastrofi distincți ai unui quasigrup n −ar (Q, A) coincide cu indicele $|S_{n+1}: H|$ al subgrupului $\mathrm{H} = \{\sigma \in \mathrm{S_{n+1}} | \mathrm{A} = {}^{\sigma}\mathrm{A}\}$ în grupul S_{n+1}. Astfel, numărul maximal posibil de parastrofi distincți ai unui quasigrup n − ar este un divizor al numărului $(\mathrm{n}+1)!$, iar seturile maximale de parastrofi distincți ale operației n −are de quasigrup A sunt seturile de reprezentanți ai claselor din mulțimea-factor, obținută la factorizarea grupului $\mathrm{S_{n+1}}$ prin H.

În acest capitol sunt date estimări ale spectrului quasigrupurilor binare și, respectiv ternare, cu un număr exact de parastrofi distincți. Se arată că există quasigrupuri binare care au exact k parastrofi distincți, pentru fiecare $k = 1, 2, 3$ sau 6, de orice ordin $q \geq 4$. În caz ternar, sunt expuse rezultatele obținute de M. McLeish referitoare la existența quasigrupurilor ternare și n −are cu un număr exact dat de parastrofi distincți și spectrul lor [11, 12].

De asemenea, în primul capitol sunt prezentate rezultatele obținute de C.C. Lindner și D. Steedly [10] ce caracterizează mulțimile de parastrofi distincți ai unui quasigrup binar (Q, A) cu ajutorul unor seturi de identități de două variabile din mulțimea

$$T = \{A(x, A(x, y)) = y, \quad A(A(y, x), x) = y, \quad A(x, y) = A(y, x),$$
$$A\big(x, A(y, x)\big) = y, \quad A(A(x, y), x) = y\}.$$

În teza dată este precizat rezultatul obținut în [10], eliminând din mulțimea T penultima identitate și utilizând în acest scop mulțimea

$$\bar{T} = \{A(x, A(x, y)) = y, A(A(y, x), x) = y, A(x, y) = A(y, x), A(A(x, y), x) = y\}.$$

Propoziția 1.1.4. *Fie (Q, A) un quasigrup binar. Sunt adevărate afirmațiile:*

1) *dacă quasigrupul (Q, A) satisface exact două identități ale mulțimii $\bar{T}$, atunci toți parastrofii săi coincid;*
2) *dacă quasigrupul (Q, A) satisface identitatea $A(A(x, y), x) = y$, atunci (Q, A) are exact doi parastrofi distincți, și aceștea sunt $A(x, y)$ și ${}^{(12)}A(x, y)$;*
3) *dacă quasigrupul (Q, A) satisface exact una dintre identitățile $A(x, A(x, y)) = y$, $A(A(y, x), x) = y$, $A(x, y) = A(y, x)$, atunci (Q, A) are exact următorii trei parastrofi distincți $A(x, y)$, ${}^{(123)}A(x, y)$, ${}^{(132)}A(x, y)$;*

4) dacă quasigrupul (Q, A) nu satisface nici una dintre identitățile mulțimii $\overline{T}$, atunci toți parastrofii săi sunt distincți.

În ultimul paragraf al primului capitol este descrisă o metodă de construcție a sistemelor ortogonale de quasigrupuri n −are finite, dată de T. Evans, care utilizează în acest scop sisteme ortogonale de quasigrupuri de aritate mai mică și metoda superpozițiilor.

În capitolul al doilea - **Quasigrupuri liniare binare și ternare cu un număr maximal dat de parastrofi distincți,** sunt prezentate rezultatele autoarei tezei, referitoare la T −quasigrupurile binare și, respectiv ternare, cu un număr exact dat de parastrofi distincți.

În paragraful 2.1 sunt date condițiile necesare și suficiente ca un T −quasigrup binar să posede exact 1, 2 sau 3 parastrofi distincți și este caracterizat spectrul unor astfel de quasigrupuri.

Propoziția 2.1.1. *Un T −quasigrup binar (Q, A), cu T − grupul $(Q,+)$, este un TS −quasigrup dacă și numai dacă*

$$A(x_1, x_2) = Ix_1 + Ix_2 + c,$$

$\forall\, x_1, x_2 \in Q$, unde $c \in Q$ și $I(x) = -x, \forall x \in Q$.

Corolarul 2.1.2. *Există TS −quasigrupuri binare de orice ordin $q \geq 1$.*

Propoziția 2.1.2. *T − Quasigrupul binar (Q, A) cu T-grupul $(Q, +)$, are exact doi parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha \in Aut(Q, +)$ și un element $c \in Q$, astfel încât*

$$A(x_1, x_2) = \alpha x_1 + a^{-1}x_2 + c,$$

unde $\alpha \neq I, \alpha^3 = I, \alpha c = -c$.

Corolarul 2.1.4. *Există T-quasigrupuri binare finite, care au exact doi parastrofi distincți, de orice ordin primar $q > 3$.*

Propoziția 2.1.3. *T-Quasigrupul (Q, A) cu T-grupul $(Q, +)$, are exact trei parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha \in Aut(Q, +)$, $\alpha \neq I$, și un element $c \in Q$, astfel încât operația $A(x_1, x_2)$ are una dintre următoarele trei forme:*

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + c, Ix_1 + \alpha x_2 + c, \;\; \alpha x_1 + Ix_2 + c.$$

Corolarul 2.1.9. *Există T-quasigrupuri binare finite, care au exact trei parastrofi distincți, de orice ordin $q > 2$.*

Paragraful 2.2 se referă la quasigrupurile binare ce posedă șase (toți) parastrofi distincți, numite DC −quasigrupuri, fiind prezentate următoarele rezultate de bază.

Propoziția 2.2.1. *Fie (Q, A) un DC −quasigrup. Sunt adevărate afirmațiile:*

1) Orice DC −quasigrup este necomutativ și netrivial.

2) Orice quasigrup care conține un DC −subquasigrup este un DC −quasigrup.

3) Orice parastrof al unui DC −quasigrupul este DC −quasigrup.

4) Orice quasigrup netrivial ce este imagine omomorfică a unui DC − quasigrup este un DC −quasigrup.

C.C. Lindner și D. Steedly [10], au arătat că există quasigrupuri binare finite, cu toți cei șase parastrofi distincți, de orice ordin $q \geq 4$. Următoarele afirmații prezintă un criteriu ca un T-quasigrup binar să fie un DC −quasigrup și caracterizarea spectrului $DC - T$-quasigrupurilor finite.

Teorema 2.2.1. *T −quasigrupul (Q, A), $A(x,\ y) = \varphi x + \psi y$, este un DC −quasigrup dacă și numai dacă $\varphi \neq I, \psi$; $\psi \neq\ I$ și $\varphi^2 \neq I\psi$ sau $\psi^2 \neq I\varphi$.*

Teorema 2.2.2. *Pentru orice $q \geq 5,\ q \neq 6$, există $DC - T$ −quasigrupuri de ordinul q.*

Spectrul quasigrupurilor ternare finite, cu un număr exact k de parastrofi distincți, unde k este divizor al numărului 24, a fost caracterizat complet în cazul $k = 1, 3, 4, 6, 12, 24$, și parțial în cazul $k = 2$ sau 8, de către M. McLeish [11, 12].

F. Sokhatsky și Y. Pirus în [17, 18] au obținut caracterizări ale quasigrupurilor ternare (Q, A), $A(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + c$, liniare peste un grup $(Q, +, 0)$, unde 0 este elementul neutru al grupului, $\alpha_i,\ i = 1, 2, 3$, sunt bijecții pe mulțimea Q, care verifică condiția $\alpha_i 0 = 0, i = 1, 2, 3$, ce posedă cel mult k parastrofi distincți (nu exact k parastrofi distincți), unde k este divizor al numărului 24.

În paragraful 2.3 sunt date condiții necesare și suficiente ca un T −quasigrup ternar să posede exact k parastrofi distincti, unde $k = 3, 4$ sau 6. În același paragraf sunt date caracterizări ale spectrului unor astfel de quasigrupuri ternare.

Propoziția 2.3.2. *Un T −quasigrup ternar (Q, A), cu T −grupul $(Q, +)$, are un maximum atins din trei parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha \in Aut(Q, +)$ și un element $c \in Q$, astfel încât operația $A(x_1, x_2, x_3)$ are una dintre următoarele trei forme: $\alpha x_1 + \alpha x_2 + I x_3 + c, I x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c,\ \ \alpha x_1 + I x_2 + \alpha x_3 + c$, unde $\alpha \neq I,\ \alpha^2 = \varepsilon,\ \ \alpha c = Ic, I(x) = -x,\ \forall x \in Q$.*

Corolarul 2.3.1. *Există T −quasigrupuri ternare idempotente cu un maximum atins din trei parastrofi distincți.*

Corolarul 2.3.2. *Pentru orice $m \geq 3$ există quasigrupuri ternare de ordinul m cu un maximum atins din trei parastrofi distincți.*

Utilizând subgrupurile de ordinul șase ale grupului S_4, în paragraful 2.3. sunt caracterizate T −formele T −quasigrupurilor ternare cu exact patru parastrofi distincți și este descris spectrul acestor quasigrupuri.

Teorema 2.3.1. *Un T −quasigrup ternar (Q, A), cu T −qrupul $(Q, +)$, are exact patru parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha \in Aut(Q, +)$ și un element $c \in Q$, astfel încât T −forma sa este una din următoarele:*

$$T_1 = \big((Q, +), \alpha, \alpha, \alpha, c\big), \quad T_2 = \big((Q, +), I, I, \alpha, c\big),$$
$$T_3 = \big((Q, +), I, \alpha, I, c\big), \quad T_4 = \big((Q, +), \alpha, I, I, c\big),$$

unde $Ix = -x$, $\alpha \neq I$.

Corolarul 2.3.4. [11] *Există quasigrupuri ternare finite de orice ordin impar $q \geq 3$ ce au exact 4 parastrofi distincți.*

De asemenea, în paragraful 2.3 al tezei sunt studiate quasigrupurile ternare cu exact șase parastrofi distincți, utilizând cele șapte subgrupuri de ordinul patru ale grupului S_4. Pentru fiecare subgrup a fost determinată T − forma T − quasigrupului corespunzător și stabilite condițiile necesare și suficiente ca un T −quasigrup ternar să posede exact șase parastrofi distincți. Au fost obținute un șir de estimări ale spectrului acestor quasigrupuri.

Teorema 2.3.2. *T − quasigrupul ternar (Q, A) cu T − qrupul $(Q, +)$ și $H = \{\sigma | \, {}^{\sigma}A = A\} \cong Z_4$ are exact șase parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha \in Aut(Q, +)$ și un element $c \in Q$, astfel încât T −forma sa este una dintre următoarele:*

$$T_1 = \big((Q, +), \alpha, I\alpha^2, \alpha^3, c\,\big), T_2 = \big((Q, +), I\alpha^2, \alpha^3, \alpha, c\big), \; T_3 = \big((Q, +), \alpha, \alpha^3, I\alpha^2, c\big),$$

unde $\alpha c = Ic, Ix = -x, \alpha^2 \neq \varepsilon, \alpha^4 = \varepsilon$.

Teorema 2.3.3. *T −quasigrupul ternar (Q, A) cu T −qrupul $(Q, +)$ și cu $H = \{\sigma | \, {}^{\sigma}A = A\} = H_i$, $i = 18, \; 19, \; 20$, are exact șase parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha \in Aut(Q, +)$ și un element $c \in Q$, astfel încât T −forma sa este una dintre următoarele $T_4 = \big((Q, +), \alpha, \alpha, I, c\,\big)$, $T_5 = \big((Q, +), \alpha, \; I, \alpha, c\big), T_6 = \big((Q, +), I, \alpha, \alpha, c\big)$, unde $\alpha^2 \neq \varepsilon$.*

Teorema 2.3.4. *T − quasigrupul ternar (Q, A) cu T − qrupul $(Q, +)$ și cu $H = \{\sigma | \, {}^{\sigma}A = A\} = H_{21} = K_4$, are exact șase parastrofi distincți dacă și numai dacă există $\alpha, \beta \in Aut(Q, +)$ și un element $c \in Q$, astfel încât T − forma sa este $T_7 = \big((Q, +), I\alpha\beta, \alpha, \beta, c\,\big)$, unde $\alpha c = \beta c = Ic$, $\alpha^2 = \beta^2 = \varepsilon, \alpha\beta = \beta\alpha, \; \alpha \neq \beta, \alpha \neq I, \beta \neq I$.*

Corolarul 2.3.6. *Există quasigrupuri ternare finite de orice ordin impar* $q, (q, 3) = 1$ *ce posedă exact șase parastrofi distincți.*

Capitolul trei se referă la **$T -$ quasigrupurile $4 -$ are cu un număr exact dat de parastrofi distincți.** Sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T -$quasigrup $4 -$ar să aibă exact 1, 5, 10 sau 20 de parastrofi distincți. Sunt prezentate unele estimări ale spectrului acestor quasigrupuri.

Propoziția 3.1.3. *Pentru ca un* $4 - T -$*quasigrup (Q, A) să fie un* $4 - TS - T -$*quasigrup, este necesar și suficient ca acesta să posede* $T -$*forma* $\big((Q,+), I, I, I, I, c\big)$, *unde* $Ix = -x,\ \forall x \in Q$.

Corolarul 3.1.1. *Există* $4 - TS - T -$*quasigrupuri de orice ordin* $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$.

Quasigrupurile $4 -$are cu exact cinci parastrofi distincți sunt caracterizate de subgrupurile de ordinul 24 ale grupului S_5. Grupul simetric S_5 are 5 subgrupuri de ordinul 24, ce sunt izomorfe cu grupul S_4, și acestea sunt:

$H_1 = \langle(1234), (12)\rangle$, $H_3 = \langle(1245), (12)\rangle$, $H_5 = \langle(2345), (23)\rangle$.
$H_2 = \langle(1235), (12)\rangle$, $H_4 = \langle(1345), (13)\rangle$,

Propoziția 3.3.1. *Un* $4 - T -$*quasigrup are exact cinci parastrofi distincți dacă și numai dacă există* $\alpha \in Aut(Q, +)$ *și un element* $c \in Q$, *astfel încât* $T -$ *forma sa este una dintre următoarele:* $T_1 = \big((Q,+), \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, c\big)$, $T_2 = (Q,+), I, I, I, \alpha, c)$, $T_3 = \big((Q,+), I, I, \alpha, I, c\big)$, $T_4 = \big((Q,+), I, \alpha, I, I, c\big)$, $T_5 = \big((Q,+), \alpha, I, I, I, c\big)$, *unde* $\alpha \neq I,\ Ix = -x$.

Corolarul 3.3.2. *Există* $4 - T -$*quasigrupuri de ordinul q, cu exact 5 parastrofi distincți, pentru orice* $q \geq 3$.

Fie (Q, A) un quasigrup $4 -$ ar și $H = \{\sigma \in S_5 |\ {}^{\sigma}A = A\}$, astfel încât $|H| = 12, H \leq S_5$. Grupul S_5 are 15 astfel de subgrupuri, dintre care 5 sunt izomorfe grupului altern A_4, iar 10 subgrupuri sunt izomorfe cu $S_2 \times S_3$.

Propoziția 3.4.1. *Nu există* $4 - T -$*quasigrupuri* (Q, A) *cu 10 parastrofi distincți, unde* $H = \{\sigma \in S_5 |\ {}^{\sigma}A = A\} \cong A_4$.

Propoziția 3.4.2. *Fie (Q, A) un* $4 - T -$*quasigrup cu* $T -$*grupul (Q, +) și fie* $H \in \{H_i, i = \overline{6, 15}\}$, *unde* $H = \{\sigma \in\ S_5 \mid {}^{\sigma}A = A\} \cong S_2 \times S_3$. *Atunci există* $\alpha \in Aut(Q, +)$ *și un element* $c \in Q$, *unde* $\alpha \neq I, Ix = -x, \forall x \in Q$, *0 este elementul neutru al grupului* $(Q, +)$, *astfel încât (Q, A) are una dintre următoarele* $T -$*forme:*

$$T_1 = ((Q, +), \alpha, \alpha, \alpha, I, c), \qquad T_2 = ((Q, +), \alpha, \alpha, I, \alpha, c),$$
$$T_3 = \big((Q, +), \alpha, I, \alpha, \alpha, c\big), \qquad T_4 = ((Q, +), I, \alpha, \alpha, \alpha, c),$$

$$T_5 = ((Q,+), I, I, \alpha, \alpha, c), \qquad T_6 = ((Q,+), I, \alpha, I, \alpha, c),$$
$$T_7 = ((Q,+), I, \alpha, \alpha, I, c), \qquad T_8 = ((Q,+), \alpha, I, I, \alpha, c),$$
$$T_9 = ((Q,+), \alpha, I, \alpha, I, c), \qquad T_{10} = ((Q,+), \alpha, \alpha, I, I, c).$$

Corolarul 3.4.2. *Pentru orice ordin impar* q, $q \geq 3$ *există* $4 - T -$*quasigrupuri cu exact 10 parastrofi distincți.*

Pentru a obține caracterizarea T −formei $4 - T$ −quasigrupurilor cu exact 20 de parastrofi distincți, sunt considerate toate cele 30 de subgrupuri de ordinul 6 ale grupului S_5, și anume:

1) 10 subgrupuri izomorfe grupului Z_6:

$$H_1 = \langle(123)(45)\rangle, H_2 = \langle(124)(35)\rangle,\ H_3 = \langle(125)(34)\rangle,\ H_4 = \langle(134)(25)\rangle,$$
$$H_5 = \langle(135)(24)\rangle, \qquad H_6 = \langle(145)(34)\rangle, \quad H_7 = \langle(234)(15)\rangle,$$
$$H_8 = \langle(235)(14)\rangle, \qquad H_9 = \langle(245)(13)\rangle, \qquad H_{10} = \langle(345)(12)\rangle;$$

2) 20 subgrupuri izomorfe cu S_3, ce sunt generate de două substituții α și β, de ordinul 3 și, respectiv 2, incluzând:

2a) 10 subgrupuri, unde β este transpoziție:

$$H_{11} = \langle(123),(12)\rangle,\ H_{12} = \langle(124),(12)\rangle,\ H_{13} = \langle(134),(13)\rangle,$$
$$H_{14} = \langle(125),(12)\rangle, \qquad H_{15} = \langle(135),(13)\rangle,\ H_{16} = \langle(145),(14)\rangle,$$
$$H_{17} = \langle(234),(23)\rangle, \qquad H_{18} = \langle(235),(23)\rangle, H_{19} = \langle(245),(24)\rangle,$$
$$H_{20} = \langle(345),(34)\rangle;$$

2b) 10 subgrupuri unde β este produs de două transpoziții independente:

$$H_{21} = \langle(123),(12)(45)\rangle, \quad H_{22} = \langle(124),(12)(35)\rangle, \quad H_{23} = \langle(125),(12)(34)\rangle,$$
$$H_{24} = \langle(134),(13)(25)\rangle, \quad H_{25} = \langle(135),(13)(24)\rangle, \quad H_{26} = \langle(145),(14)(23)\rangle,$$
$$H_{27} = \langle(234),(23)(15)\rangle, \quad H_{28} = \langle(235),(23)(14)\rangle, \quad H_{29} = \langle(245),(13)(24)\rangle,$$
$$H_{30} = \langle(345),(34)(12)\rangle.$$

Au fost obținute următoarele rezultate:

Teorema 3.6.1. *Fie (Q, A) un* $4 - T -$*quasigrup cu* $T -$*grupul* $(Q,+)$ *și fie* $H \in \{H_i,\ i = \overline{11, 20}\}$, *unde* $H = \{\sigma \in\ S_5 \mid {}^{\sigma}A = A\}$. *Atunci există* $\alpha, \beta \in Aut(Q,+)$ *și un element* $c \in\ Q$, *astfel încât* $\alpha \neq \beta,\ \alpha \neq I,\ \beta \neq I,\ \alpha c + c \neq 0,\ \beta c + c \neq 0,\ Ix = -x,\ \forall x \in Q$, *unde 0 este elementul neutru al grupului abelian* $(Q,+)$, *astfel încât* (Q, A) *are una dintre următoarele* T *−forme:*

$$T_1 = \big((Q,+), \alpha, \alpha, \alpha, \beta, c\big), \qquad T_2 = \big((Q,+), \alpha, \alpha, \beta, \alpha, c\big), \qquad T_3 = ((Q,+), \alpha, \beta, \alpha, \alpha, c),$$
$$T_4 = ((Q,+), \beta, \alpha, \alpha, \alpha, c), \qquad T_5 = ((Q,+), I, I, \alpha, \beta, c), \qquad T_6 = ((Q,+), I, \alpha, I, \beta, c),$$
$$T_7 = \big((Q,+), I, \alpha, \beta, I, c\big), \qquad T_8 = \big((Q,+), \alpha, I, I, \beta, c\big), \qquad T_9 = ((Q,+), \alpha, I, \beta, I, c),$$
$$T_{10} = ((Q,+), \alpha, \beta, I, I, c).$$

Propoziția 3.6.1. $4-T-$*quasigrupul* (Q,A) *cu* $T-$*forma* $T_1 = \big((Q,+),\alpha,\alpha,\alpha,\beta,c\big)$, *unde* $\alpha \neq \beta, \alpha \neq I, \beta \neq I, I(x) = -x, \forall x \in Q$, *are exact 20 de parastrofi distincți.*

Corolarul 3.6.1. $4-T-$*quasigrupul (Q, A), unde* $\{\sigma \in S_5 |\ A = {}^{\sigma}A\} = \langle(123),(23)\rangle$, *are exact 20 de parastrofi distincți dacă și numai dacă există* $\alpha,\beta \in Aut(Q,+)$ *și un element* $c \in Q$, *astfel încât (Q, A) are* $T-$*forma* $((Q,+),\alpha,\alpha,\alpha,\beta,c)$, *unde* $\alpha \neq \beta, \alpha \neq I, \beta \neq I, I(x) = -x, \forall x \in Q$.

Teorema 3.6.2. *Nu există* $4-T-$*quasigrupuri (Q, A), astfel încât grupul* $H = \{\sigma \in S_5 |\ A = {}^{\sigma}A\}$ *este izomorf cu* $\mathbb{Z}_6$.

Teorema 3.6.3. *Nu există* $4-T-$*quasigrupuri* (Q,A) *astfel încât* $H \in \{H_{21},H_{22},\ldots,H_{30}\}$, *unde* $H = \{\sigma \in S_5 |\ A = {}^{\sigma}A\}$.

Corolar 3.6.2. *Există* $4-T-$*quasigrupuri cu exact 20 de parastrofi distincți de orice ordin impar* $q > 1$, *unde* $(q,3) = 1$.

De asemenea, în capitolul trei se demonstrează că nu există $T-$quasigrupuri $4-$are cu exact 2, 6 sau 15 parastrofi distincți.

Grupul S_5 are un singur subgrup de ordinul 60 și acesta este grupul altern A_5. Cei doi parastrofi distincți ai unui quasigrup $4-$ar (Q,A) cu $\{\sigma \in S_5 \mid {}^{\sigma}A = A\} = A_5$, sunt dați de seturi de reprezentanți ai claselor de resturi $\{A_5,\ A_5\tau \mid \tau \in S_5 \setminus A_5\}$.

Propoziția 3.2.1. *Nu există* $4-T-$*quasigrupuri cu exact doi parastrofi distincți.*

Quasigrupurile $4-$are cu exact șase parastrofi distincți sunt caracterizate de subgrupurile de ordinul 20 ale grupului S_5. Acest grup are exact 6 astfel de subgrupuri, și anume:

$H_1 = \langle(12345),(2453)\rangle$, $H_2 = \langle(12435),(2453)\rangle$, $H_3 = \langle(12453),(2435)\rangle$,
$H_4 = \langle(12543),(2534)\rangle$, $H_5 = \langle(12534),(2543)\rangle$, $H_6 = \langle(13524),(3542)\rangle$.

Propoziția 3.2.2. *Nu există* $4-T-$*quasigrupuri cu exact șase parastrofi distincți.*

Quasigrupurile $4-$are cu exact 15 parastrofi distincți sunt caracterizate de subgrupurile de ordinul 8. Grupul S_5 are în total 15 astfel de subgrupuri de ordinul 8, toate fiind izomorfe grupului D_8:

$H_1 = \langle(1234),(13)\rangle$; $H_6 = \langle(1325),(12)\rangle$; $H_{11} = \langle(1354),(15)\rangle$;
$H_2 = \langle(1243),(14)\rangle$; $H_7 = \langle(1245),(14)\rangle$; $H_{12} = \langle(1435),(13)\rangle$;
$H_3 = \langle(1324),(12)\rangle$; $H_8 = \langle(1254),(15)\rangle$; $H_{13} = \langle(2345),(24)\rangle$;
$H_4 = \langle(1235),(13)\rangle$; $H_9 = \langle(1425),(12)\rangle$; $H_{14} = \langle(2354),(25)\rangle$;
$H_5 = \langle(1253),(15)\rangle$; $H_{10} = \langle(1345),(14)\rangle$; $H_{15} = \langle(2435),(23)\rangle$.

Propoziția 3.5.1. *Nu există* $4-T-$*quasigrupuri cu exact 15 parastrofi distincți.*

În ultimul capitol, **Quasigrupuri total parastrofic-ortogonale**, sunt studiate quasigrupurile $n-$are parastrofic-ortogonale, inclusiv total parastrofic-ortogonale, pentru $n = 2, 3, 4$. În caz binar sunt obținute caracterizări ale quasigrupurilor binare în care toți cei șase parastrofi formează un sistem ortogonal, numite $totCO-$ quasigrupuri. Se arată că clasa $totCO-$ quasigrupurilor este închisă în raport cu transformarea de parastrofie și imaginile omomorfice, sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T-$ quasigrup binar să fie un $totCO-$quasigrup. Sunt prezentate estimări ale spectrului $totCO-$quasigrupurilor.

Propoziția 4.1.1. *$T-$ quasigrupul (Q, A), unde $A(x,y) = \varphi x + \psi y + c, c \in Q$, este un $totCO-$quasigrup dacă și numai dacă aplicațiile $\varphi + \varepsilon$, $\varphi - \varepsilon$, $\psi + \varepsilon$, $\psi - \varepsilon$, $\varphi^2 + \psi$, $\psi^2 + \varphi$, $\varphi - \psi$, $\varphi + \psi$, $\psi\varphi - \varepsilon$ sunt bijecții.*

Corolarul 4.1.1. *$T-$quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$, $A(x,y) = \bar{a}x + \bar{b}y$, este un $totCO-$quasigrup dacă și numai dacă numerele $a+1, a-1, b+1, b-1, a^2+b, b^2+a, a-b, a+b, ab-1$ sunt reciproc prime cu n.*

Corolarul 4.1.2. *Dacă $T-$ quasigrupul $(\mathbb{Z}_n, A)$, $A(x,y) = \bar{a}x + \bar{b}y$, este un $totCO-$ quasigrup, atunci $a \neq -1, 1, b, -b, -b^2$; $b \neq -1, 1, -a^2$, $ab \neq 1 \ (mod\ n)$.*

Teorema 4.1.1. *Pentru orice număr întreg $n \geq 11$, ce este reciproc prim cu 2, 3, 5 și 7, există $totCO-$quasigrupuri de ordinul n.*

Corolarul 4.1.3. *Există $totCO-$quasigrupuri de orice ordin $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, unde p_i este număr prim, $p_i \neq 2, 3, 5, 7$, $k_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, s$, $s \geq 1$.*

Propoziția 4.1.2. *Considerăm quasigrupurile $(\mathbb{Z}_n, A_i)$, $i = 1, 2, \dots, 8$, unde:*

$$A_1(x,y) = 2x + 4y,\ A_2(x,y) = 3x + 5y,\ A_3(x,y) = 2x + 3y,\ A_4(x,y) = 2x + 8y,$$
$$A_5(x,y) = 5x + 10y,\ A_6(x,y) = 5x + 11y,\ A_7(x,y) = 3x + 7y,\ A_8(x,y) = 3x + 9y.$$

Sunt adevărate afirmațiile:

1) Quasigrupurile $(\mathbb{Z}_n, A_1)$ și $(\mathbb{Z}_n, A_2)$, sunt $totCO-$quasigrupuri dacă și numai dacă n este reciproc prim cu fiecare dintre numerele 2, 3, 5 și 7;

2) Quasigrupurile $(\mathbb{Z}_n, A_i)$ unde $i = 3, 4, 5, 6$, sunt $totCO-$quasigrupuri dacă și numai dacă n este reciproc prim cu fiecare dintre numerele 2, 3, 5, 7 și 11;

3) Quasigrupurile $(\mathbb{Z}_n, A_7)$ și $(\mathbb{Z}_n, A_8)$, sunt $totCO-$quasigrupuri dacă și numai dacă n este reciproc prim cu fiecare dintre numerele 2, 3, 5, 7 și 11.

Propoziția 4.1.3. *Orice parastrof al unui $totCO-$quasigrup este la fel un $totCO-$quasigrup.*

În caz ternar sunt date condiții necesare și suficiente ca un T −quasigrup să aibă exact trei sau exact patru parastrofi distincți care formează un sistem ortogonal și estimări ale spectrului acestor quasigrupuri.

Teorema 4.2.1. *Un T −quasigrup ternar (Q, A), cu T −grupul $(Q, +)$, are exact trei parastrofi distincți ce sunt și ortogonali dacă și numai dacă operația $A(x_1, x_2, x_3)$ are una dintre următoarele forme:*

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + I x_3 + c, \qquad I x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + c, \qquad \alpha x_1 + I x_2 + \alpha x_3 + c,$$

unde $Ix = -x,\ \alpha \neq I, 2\alpha \neq \varepsilon,\ \alpha^2 = \varepsilon,\ \alpha c = Ic,\ \alpha \in\ Aut\ (Q, +),\ c \in Q$.

Corolarul 4.2.2. *Există quasigrupuri ternare finite, cu exact trei parastrofi distincți ce sunt și ortogonali, de orice ordin q impar, $q \geq 3$.*

Corolarul 4.2.3. *Fie $(\mathbb{R}, +,\cdot)$ câmpul numerelor reale și $(\mathbb{R}, A)$ un quasigrup ternar liniar peste $\mathbb{R}$. Atunci $(\mathbb{R}, A)$ este un quasigrup ternar idempotent cu exact trei parastrofi distincți ce sunt și ortogonali dacă și numai dacă operația $A(x_1,\ x_2,\ x_3)$ are una dintre formele:*

$$x_1 + x_2 - x_3,\ \ x_1 - x_2 + x_3 \textit{ sau } -x_1 + x_2 + x_3.$$

Corolarul 4.2.4. *Există quasigrupuri ternare infinite cu exact trei parastrofi distincți ce sunt și ortogonali.*

În paragraful 2.3 sunt studiate T −quasigrupurile ternare cu exact patru parastrofi distincți, fiind indicate seturile de identități ce asigură proprietatea dată. De asemenea, este analizată forma operației T −quasigrupului ternar, ce posedă exact 4 parastrofi distincți. Observăm că, în acest caz, un set de patru parastrofi distincți ai unui quasigrup ternar este: $\left\{A,\ {}^{(12)(34)}A,\ {}^{(13)(24)}A,\ {}^{(14)(23)}A\right\}$.

Conform Teoremei 2.3.1, un T −quasigrup ternar (Q, A), cu T −grupul $(Q, +)$, are exact patru parastrofi distincți dacă și numai dacă operația A are una din formele: $A_1(x_1,\ x_2, x_3) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3, A_2(x_1,\ x_2,\ x_3) = I x_1 + \alpha x_2 + I x_3,\ A_3(x_1,\ x_2,\ x_3) = I x_1 + I x_2 + \alpha x_3,$ $A_4(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + I x_2 + I x_3,$ unde $\alpha \in\ Aut\ Q(+)\quad Ix = -x,\ \alpha \neq I$. Utilizând acest rezultat, este demonstrată următoarea teoremă:

Teorema 4.2.2. *Un T −quasigrup ternar (Q, A), cu T −grupul $(Q, +)$, cu exact patru parastrofi distincți, este total parastrofic-ortogonal dacă și numai dacă $\alpha + \varepsilon,\ \varepsilon + 2I\alpha \in\ AutQ(+)$, unde $\alpha \in\ Aut\ Q(+), Ix = -x,\ \alpha \neq I$.*

Corolarul 4.2.6. *Există quasigrupuri ternare finite de orice ordin impar $q \geq\ 3$ ce au exact 4 parastrofi distincți ce sunt și ortogonali.*

Conform Propoziției 3.3.1, un $4-T$ −quasigrup are exact cinci parastrofi distincți dacă și numai dacă T −forma sa este una dintre următoarele:

$$T_1 = \big((Q,+),\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,c\big), \qquad T_2 = (Q,+),I,I,I,\alpha,c), \qquad T_3 = ((Q,+),I,I,\alpha,I,c),$$

$$T_4 = ((Q,+),I,\alpha,I,I,c), \ \ T_5 = ((Q,+),\alpha,I,I,I,c),$$

unde $\alpha \neq I,\ Ix = -x$. O condiție necesară și suficientă ca cei cinci parastrofi să fie și ortogonali este următoarea:

Teorema 4.3.1. *T −quasigrupul 4-ar (Q, A) cu T −forma $\big((Q,+),\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,c\big)$, cu exact cinci parastrofi distincți, este total parastrofic-ortogonal dacă și numai dacă $\alpha+\varepsilon \in Aut(Q,+)$.*

Corolarul 4.3.1. *T −quasigrupul 4-ar cu T −forma $((\mathbb{Z}_n,+),\bar{a},\bar{a},\bar{a},\bar{a},\bar{c}\,)$, unde $(a,n)=1$ și $(a+1,n)=1$, are exact 5 parastrofi distincți ce sunt și ortogonali.*

Corolarul 4.3.2. *Există T-quasigrupuri 4-are finite, cu exact 5 parastrofi distincți și ortogonali, de orice ordin $q \geq 3$.*

În ultimul paragraf al Capitolului 4, în baza metodei de construcție a sistemelor ortogonale de operații $n-$are, date de Trevor Evans, sunt prezentate construcții ale operațiilor $k-$are parastrofic-ortogonale, în particular auto-ortogonale, unde k are una din următoarele forme: $k=n^2, 2^n, mn,$ pentru $n,m \geq 2$.

Propoziția 4.4.1. *Fie (Q,A) un quasigrup n −ar auto-ortogonal și fie $\{{}^{\alpha_1}A, {}^{\alpha_2}A, \dots, {}^{\alpha_n}A\}$ un sistem ortogonal de parastrofi principali ai quasigrupului (Q,A). Grupoidul n^2 −ar (Q,B_1), unde*

$$B_1\big(x_1^{n^2}\big) = {}^{\alpha_1}A\left({}^{\alpha_1}A(x_1^n), {}^{\alpha_1}A(x_{n+1}^{2n}), \dots, {}^{\alpha_1}A\left(x_{n(n-1)+1}^{n^2}\right)\right)$$

este un quasigrup auto-ortogonal.

Corolarul 4.4.1. *Dacă există quasigrupuri n −are auto-ortogonale de ordinul q, atunci există quasigrupuri auto-ortognale n^2 −are de ordinul q.*

Corolarul 4.4.2. *Există quasigrupuri 2^n -are auto-ortognale de orice ordin q, unde $q \in \mathbb{N}^*\backslash\{1,2,3,6\}$.*

Teorema 4.4.2. *Fie (Q,A) și (Q,B) quasigrupuri finite $n-$ar și respectiv $m-$ar auto-ortogonale. Dacă $\{{}^{\alpha_1}A, {}^{\alpha_2}A, \dots . {}^{\alpha_n}A\}$ și $\left\{{}^{\beta_1}B,\ {}^{\beta_2}B, \dots, {}^{\beta_m}B\right\}$ sunt sisteme ortogonale de parastrofi principali ai quasigrurilor respective, atunci grupoidul (Q,C_1), unde*

$$C_1(x_1^{mn}) = {}^{\beta_1}B({}^{\alpha_1}A(x_1^n), \dots, \qquad {}^{\alpha_1}A(x_{n(m-1)+1}^{mn}))$$

este un quasigrup auto-ortogonal nm-ar.

Corolarul 4.4.6. *Dacă pe o mulțime finită Q există quasigrupuri auto-ortogonale m $-are$ și n $-are$ $(n,\ m \geq\ 2)$, atunci pe această mulțime există quasigrupuri mn $-are$ auto-ortogonale.*

Corolarul 4.4.7. *Dacă există quasigrupuri n $-are$ auto-ortogonale de ordinul q, atunci există quasigrupuri auto-ortogonale n^k $-are$ de ordinul q, unde $k \geq 2$.*

Corolarul 4.4.8 *Există quasigrupuri 2^k -are auto-ortogonale de orice ordinul $q \neq 1, 2, 3, 6$ și orice $k \geq 1$.*

Corolarul 4.4.9. *Există quasigrupuri auto-ortogonale p^k-are de ordinul p pentru orice p $-$ prim, impar și orice $k \in \mathbb{N}^*$.*

Lucrarea conține și 5 anexe ce includ subgrupurile grupului S_4 și subgrupurile de ordinul 24, 20, 12, 8 și 6, respectiv, ale grupului S_5, T $-$formele T $-$quasigrupurilor binare cu exact k parastrofi distincți și ortogonali, unde $k \in \{1, 2, 3, 6\}$, T $-$formele T $-$quasigrupurilor ternare cu exact k parastrofi distincți, unde $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, parastrofii T $-$ quasigrupurilor ternare și, respectiv, 4-are.

3. CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Teza dată se referă la studiul quasigrupurilor $n -$are cu un număr exact de parastrofi distincți, în particular la quasigrupuri $n -$are cu sisteme maximale ortogonale de parastrofi distincți, numite quasigrupuri total parastrofic-ortogonale.

Scopul tezei constă în obținerea unor caracterizări ale quasigrupurilor $n -$are $(n = 2, 3, 4)$, ce posedă un număr exact posibil de parastrofi distincți, în particular, seturi maximale ortogonale de parastrofi, precum și estimarea spectrului lor.

Problema existenței quasigrupurilor, ce posedă un număr dat de parastrofi distincți, și a caracterizării spectrului lor, formulată de Lindner și Steedly, este considerată pentru clasa $n - T -$quasigrupurilor $(n = 2, 3, 4)$, inclusiv cu sistemele maximale ortogonale de parastrofi distincți. În caz ternar problema existenței quasigrupurilor finite cu un număr exact de parastrofi distincți a fost soluționată de M. McLeish, integral pentru $k = 1, 3, 4, 6, 12, 24$ parastrofi distincți și parțial pentru $k = 2, 8$ parastrofi distincți. Problema caracterizării quasigrupurilor binare liniare cu un număr exact dat de parastrofi distincți, inclusiv ortogonali, a fost inițiată de către autorea tezei în colaborare cu G. Beleavskaya [4], fiind abordată în caz ternar de Sokhatsky, Fryz, Pirus ș.a.

În teză sunt prezentate următoarele ***rezultate principale*** ale autoarei:

1. Sunt introduse și studiate două clase noi de quasigrupuri binare: $DC -$quasigrupuri (ce posedă șase parastrofi distincți) și $totCO -$quasigrupuri (ce posedă șase parastrofi ortogonali);
2. Se demonstrează că clasa $DC -$quasigrupurilor este închisă în raport cu transformarea de parastrofie și că orice quasigrup netrivial ce este imagine omomorfică a unui $DC -$quasigrup este un $DC -$quasigrup;
3. Este caracterizat spectrul $DC - T -$ quasigrupurilor finite. Se arată că există $DC - T -$quasigrupuri de ordinul n, pentru orice $n \geq 5$, $n \neq 6$;
4. Sunt obținute caracterizări ale $totCO -$ quasigrupurilor. În particular, se arată că clasa $totCO -$quasigrupurilor este închisă în raport cu transformarea de parastrofie și imaginile omomorfice, sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T -$quasigrup binar să fie un $totCO -$quasigrup;
5. C.C. Lindner și D. Steedly [10] au arătat că există quasigrupuri binare finite cu exact 1, 2, 3 sau 6 parastrofi distincți și au caracterizat integral spectrul lor. Pentru soluționarea acestor probleme, acești autori au utilizat, în particular, cinci identități de lungime patru, cu două variabile. Autoarea tezei a precizat acest rezultat, arătând că una dintre cele cinci identităti poate fi eliminată (Propozitia 1.1.4);

6. Sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T-$quasigrup ternar să posede exact k parastrofi distincti, unde $k=3,4$ sau 6. Sunt construite exemple și sunt date estimări ale spectrului lor. Se arată că:

   a) există quasigrupuri ternare finite, cu exact trei parastrofi distincți, de orice ordin $q \geq 3$;

   b) există $T-$quasigrupuri ternare finite, ce au exact patru parastrofi distincți, de orice ordin impar $q \geq 3$;

   c) există $T-$quasigrupuri ternare finite de ordin impar $q, (q,3)=1$, ce posedă exact șase parastrofi distincți;
7. Sunt date condiții necesare și suficiente ca un $T-$quasigrup 4-ar să aibă exact 1, 5, 10 sau 20 de parastrofi distincți. Sunt prezentate unele estimări ale spectrului acestor quasigrupuri.
8. Se demonstrează că nu există $T-$quasigrupurile 4-are cu exact 2, 6 sau 15 parastrofi distincți;
9. Sunt prezentate estimări ale spectrului quasigrupurilor n-are parastrofic-ortogonale, respectiv, total parastrofic-ortogonale, $n=2,3,4$, inclusiv a $totCO-$quasigrupurilor:
   a) nu există $totCO-$quasigrupuri binare de ordin mai mic ca 7, însă există astfel de quasigrupuri de orice ordin q, reciproc prim cu 2, 3, 5 și 7;
   b) există quasigrupuri ternare finite cu exact trei parastrofi distincți, ce sunt și ortogonali, de orice ordin impar $q \geq 3$;
   c) există quasigrupuri ternare finite de orice ordin impar $q \geq 3$ ce au exact 4 parastrofi distincți ce sunt și ortogonali;
   d) există quasigrupuri 4-are cu exact 5 parastrofi distincți și ortogonali de orice ordin $q \geq 3$;
10. În baza metodei de construcție a sistemelor ortogonale de operații $n-$are, date de Trevor Evans, sunt prezentate construcții ale operațiilor $n-$are parastrofic-ortogonale, în particular auto-ortogonale $k-$are, unde k are una din următoarele forme: $k=n^2, 2^n, mn$, unde $n,\ m \geq 2$. Astfel se obține că, dacă pe o mulțime finită Q există quasigrupuri auto-ortogonale $m-$are și, respectiv $n-$are, unde $n,\ m \geq 2$, atunci pe această mulțime există quasigrupuri $mn-$are auto-ortogonale. În particular, din această construcție rezultă că există quasigrupuri $2^n-$are auto-ortogonale de orice ordin $q \neq 1,2,3,6$, pentru orice $n \geq 1$.

Rezultatele autoarei T. Rotari (T. Popovich) la tema tezei de doctorat au fost publicate în 27 de lucrări științifice, inclusiv 10 articole științifice și 17 rezumate ale comunicărilor la conferințe științifice de specialitate.

Recomandări:

1. Metoda de caracterizare a T −quasigrupurilor cu un număr exact dat de parastrofi distincți poate fi utilizată pentru obținerea unor rezultate analogice în cazul quasigrupurilor 4 −are cu exact k parastrofi distincți pentru $k \geq 24, \ \ k|120$;
2. Caracterizarea spectrului quasigrupurilor ternare cu exact doi sau exact opt parastrofi distincți necesită elaborarea unor metode noi de construcție a unor astfel de quasigrupuri, de exemplu, metode combinatorice;
3. La caracterizarea quasigrupurilor n −are total parastrofic-ortogonale cu exact k parastrofi distincți, unde $k < n$, pot fi utilizate alte definiții ale ortogonalității;
4. Sistemele ortogonale de quasigrupuri n −are, $n \geq 2$, pot fi utilizate la construirea MDS-codurilor, în criptografie, la planificarea experimentelor, în combinatorică ș.a.

BIBLIOGRAFIE

1. BELOUSOV, V. Parastrophic-orthogonal quasigroups. In: *Quasigroups and related systems,* 2005, V. 13, No. 1, pp. 25–72. ISSN 1561-2848
2. BELOUSOV, V. *Foundations of the Theory of Quasigroups and Loops*. (in Russian) Moscow: Nauka, 1967. 224 p.
3. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. On the classes of quasigroups defined by the conjugate sets. In*: Abstracts of Conference "Mathematics&Information technologies: Research and Education" (MITRE-2011),* August 22-25, 2011, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 8-9. ISBN 978-9975-71-137-1
4. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. Totally parastrophe orthogonal quasigroups and complete graphs (in Russian). In: *Fundamentalinaya i prikladnaya mathematica*, 2010, V. 16 (8), pp. 17-26. ISSN 1560-5159
5. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. Conjugate sets of loops and quasigroups. DC-quasigroups. In: *Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat.,* 2012, V. 1 (68), pp. 21-31. ISSN 1024-7696
6. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. About quasigroups with distinct conjugates. In: *Book of abstracts of the 8-th International Algebraic Conference in Ukraine Dedicated to the memory of Professor V.M. Usenko*, Lugansk, July 5-12, 2011, p. 247
7. BOSE, R. C., SHRIKHANDE, S. S., PARKER, E. T. Further results of the constructions of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture. In: *Canadian Journal of Mathematics*. 1960, V. 12, pp. 189-203. ISSN 0008-414X
8. DENES, J., KEEDWELL, A. D. *Latin squares and their applications*: Second edition. Elsevier, 2015. 453 p. ISBN 978-0444-63-555-6
9. FRYZ, I., SOKHATSKY, F. Construction of medial ternary self-orthogonal quasigroups. In: *Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat.,* 2022, No. 3 (100), pp. 41-55. ISSN 1024-7696
10. LINDNER, C. C., STEEDLY, D. On the number of conjugates of a quasigroup. In: *Algebra Univ.,* 1975, V. 5, pp. 191–196. ISSN 0002-5240
11. McLEISH, M. On the number of conjugates of $n-$ary quasigroups. In*: Canadian Journal of Mathematic,* 1979, V. 31, nr. 3, pp. 637-654. ISSN 0008-414X
12. McLEISH, M. On the existence of ternary quasigroups with 2 or 8 conjugacy classes. In: *Journal of Combinatorial Theory,* Seria A, 1980, V.29, nr. 2, pp. 199-211. ISSN 0097-3165
13. MOUFANG, R. Alternativkorper und der Satz vom vollstandigen Vierseit. In: *Adhandlungen aus dem Mathetischen Seminar der Universitat Hamburg,* 1933, V. 9, pp. 207-222, ISSN

0014-4428

14. PFLUGFELDER, H. O. *Quasigroups and loops: introduction.* Berlin: Heldermann Verlag, 1990. 147 p. ISBN 978-3885-38-007-8
15. SADE, A. Quasigroupes obéissant à certaines lois. In: *Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Série A*. 1957, V. 22, pp. 151–184. ISSN 0364-541X
16. SOKHATSKY, F., FRYZ, I. Invertibility criterion of composition of two multiary quasigroups. In: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. 2012, V. 53, nr. 3, pp. 429–445. ISSN 0010-2628
17. SOKHATSKY, F., PIRUS, Y. Classification of ternary quasigroups according to their parastrophic symmetry groups, I. In: *Visnik DonNU. Ser. A: Prirod. nauki*, 2018, nr. 1-2, pp. 70–81. ISSN 2522-4468
18. SOKHATSKY, F., PIRUS, Y. Classification of ternary quasigroups according to their parastrophic symmetry groups, II. In: *Visnik DonNU. Ser. A: Prirod. nauki*, 2019, nr. 1-2, pp. 101–110. ISSN 2522-4468
19. SUSCHKEWITSCH, A. K. Zur Theorie der endlichen Gruppen nichtassoziativer Systeme. In: *Mathematische Annalen*. 1928, V. 99, pp. 30–50. ISSN 0025-5831
20. SYRBU, P. On orthogonality and self-orthogonality of n-ary operations (în Rusă). In: *Mat. Issled.* Chișinău: Știința, 1987, V. 95, pp. 121–130. ISSN 0542-9994

LISTA PUBLICAȚIILOR AUTORULUI LA TEMA TEZEI

a) ***Articole în reviste științifice cotate SCOPUS***

1. ROTARI, T., SYRBU, P. On 4-T-quasigroups with exactly 20 distinct parastrophes. In: *Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat.,* 2025, No. 1 (107), pp. 107-119. ISSN 1024-7696
2. BELEAVSCAIA, G., POPOVICI, T. Near-totally conjugate orthogonal quasigroups. In: *Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat*., 2014, nr. 3 (76), pp. 89-96. ISSN 1024-7696
3. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. Totally conjugate orthogonal quasigroups and complete graphs. In: *Journal of Mathematical Sciences,* 2012, vol.185, no. 2, pp. 184–191. ISSN 1072-3374
4. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. Conjugate sets of loops and quasigroups. DC-quasigroups. In: *Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat.,* 2012, nr. 1 (68), pp. 21-31. ISSN 1024-7696
5. POPOVICH, T. On conjugate sets of quasigroups. *Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat.,* 2011, nr. 3(67), pp. 69-76. ISSN 1024-7696
6. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. Totally parastrophe orthogonal quasigroups and complete graphs (in Russian). In: *Fundamentalinaya i prikladnaya mathematica*, 2010, V. 16 (8), pp. 17-26. ISSN 1560-5159

b) Articole în culegeri de articole ale conferințelor științifice de specialitate

7. SYRBU, P**.,** ROTARI, T. On Self-Orthogonal n-ary Quasigroups. In: *Proceedings of the Int. Conf. dedicated to the 60th anniversary of the foundation of V. Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science,* October 10-13, 2024, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 126 – 131. ISBN 978-9975-68-523-8
8. POPOVICH, T. On near-conjugate-orthogonal quasigroups. In: *Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50,* August 19-23, 2014, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 150-153. ISBN 978-9975-68-245-9
9. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. On graphs related to quasigroups. In: *Topics in Graph Theory: A tribute to A. A. and T. E. Zykovs on the occasion of A. A. Zykov's 90th birthday***.** 2013, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, SUA, pp. 187–193. Disponibil: https://kostochk.web.illinois.edu/Zykov90-Topics_in_Graph_Theory.pdf
10. POPOVICH, T. Conjugate-orthogonal Quasigroups and Graphs. In: *International Workshop on Intelligent Information System*: *Proceeding IIS,* September 13-14, 2011, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 256-259. ISBN 978-9975-4237-0-0

c) Rezumate ale comunicărilor la conferințe științifice de specialitate internaționale și naționale:

11. ROTARI, T., SYRBU, P. On n −ary T −quasigroups with a prescribed maximum number of distinct parastrophes. In: *Abstracts of the 32nd International Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2025),* September 18 – 21, 2025, Bucharest, Romania, p. 99. ISSN 2537-2688
12. ROTARI, T. On ternary quasigroups with exactly three distinct and orthogonal parastrophes. In: *Abstracts of the International Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2024),* September 19-22, 2024, Oradea, Romania, p. 64. ISSN 2537-2688
13. SYRBU, P., ROTARI, T. On self-orthogonal finite $n-$ary quasigroups. In: *Abstracts of the International Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2024),* September 19-22, 2024. Oradea, Romania, p. 63. ISSN 2537-2688
14. ROTARI, T. On the conjugate sets of IP-quasigroups. In: *Abstracts of the XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky*, July 02-06, 2019, Vinnytsia, Ukraine, pp. 94-95. Disponibil: https://jiac.donnu.edu.ua/article/view/6993
15. POPOVICI, T., SHCHERBACOV, V. Parastrophes orthogonality of alinear quasigroups. In: *Abstracts of the XI International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko,* July 03-07, 2017, Kyiv, Ukraine, p. 104. Disponibil: https://imath.kiev.ua/~algebra/iacu2017/abstracts_pdf
16. POPOVICH, T. On sets of conjugates of quasigroups. In: *Abstracts of the 8-th International Algebraic Conference in Ukraine Dedicated to the memory of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko,* July 5-12, 2011, Lugansk, Ukraine, p. 269. Disponibil: https://dspace.luguniv.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/2647/_2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y
17. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. About quasigroups with distinct conjugates. In: *Abstracts of the 8-th International Algebraic Conference in Ukraine Dedicated to the memory of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko,* July 5-12, 2011, Lugansk, Ukraine, p. 247. Disponibil: https://dspace.luguniv.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/2647/_2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y
18. POPOVICH, T. On parastrophe-orthogonal quasigroups and graphs (in Russian). In: *Abstracts of the 10-th International Seminar Discrete mathematics and its Aplications,* February 1-6, 2010, Moscow, Russia, pp. 258-260. Disponibil: https://keldysh.ru/dms/10dmsem-2010.pdf
19. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. Totally conjugate-orthogonal quasigroups. In: *Abstracts of*

the 7-th International Algebraic Conference in Ukraine. August 18-23, 2009, Kharkov, Ukraine, pp. 26-27. Disponibil:
https://www.academia.edu/48370922/7th_International_Algebraic_Conference_in_Ukraine

20. ROTARI, T. Ternary quasigroups with exactly four distinct parastrophes, which are orthogonal. In: *Abstracts of the National conference with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations*, September 18-19, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, p. 22. ISBN 978-9975-62-898-3
21. ROTARI, T., SYRBU, P. On 4-quasigroups with exactly five distinct parastrophes. In: *Abstracts of the International Conference on Quasigroups and Related Systems (ConfQRS),* July 2 – 4, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, p. 33. ISBN 978-9975-62-880-8
22. ROTARI, T., SYRBU, P. On 4-quasigroups with exactly ten distinct parastrophes. In: *Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE 2025),* June 26-29, 2025. Chișinău, Republic of Moldova,, p. 24. ISBN 978-9975-62-879-2 (PDF)
23. ROTARI, T. Parastrophes of ternary quasigroups and their orthogonality. In: *Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE 2023),* June 26-29, 2023. Chișinău, Republic of Moldova, p. 32. ISBN 978-9975-62-535-7
24. POPOVICH, T. Orthogonal sets of conjugates of T-quasigroups. In: *Abstracts of Conference on Applied and Industrial Mathematics Dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu.* Chișinău, August 22-25, 2012. Chișinău, Republic of Moldova, pp. 187-188. ISBN 978-9975-76-090-4
25. POPOVICH, T. On the conjugate sets of quasigroups and identities. In: *Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE 2011),* August 22-25, 2011. Chișinău, Republic of Moldova, pp. 95-96. ISBN 978-9975-144-9
26. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. On the classes of quasigroups defined by the conjugate sets. In: *Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education"(MITRE 2011),* August 22-25, 2011. Chișinău, Republic of Moldova, pp. 8-9. ISBN 978-9975-144-9
27. BELYAVSKAYA, G., POPOVICH, T. On totally and near-totally conjugate-orthogonal quasigroups. In: *Abstracts of the International Scientific Conf. "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE 2009),* October 8-9, 2009. Chișinău, Republica of Moldova, pp. 3-4. ISBN 978-9975-70-891-3

ADNOTARE

la teza cu titlul **„Quasigrupuri cu parastrofii distincți ortogonali”,** înaintată de candidatul **Rotari Tatiana,** pentru conferirea titlului științific de doctor în științe matematice la specialitatea **111.03 – Logică matematică, algebră și teoria numerelor,**

Chișinău, 2026

Structura tezei: teza este scrisă în limba română și cuprinde: introducere, patru capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie 162 de titluri și 5 anexe. Teza conține 112 pagini cu text de bază. Rezultatele obținute sunt publicate în 27 lucrări științifice cu volum total de circa 6,06 coli de autor.

Cuvinte-cheie: quasigrup n-ar, parastrof, quasigrup liniar, T-quasigrup, quasigrup (total) parastrofic-ortogonal, DC-quasigrup, *totCO*-quasigrup.

Scopul și obiectivele lucrării. Scopul tezei constă în obținerea unor caracterizări ale quasigrupurilor n −are ($n = 2, 3, 4$), ce posedă un număr maximal posibil de parastrofi distincți, în particular, a quasigrupurilor total parastrofic-ortogonale, precum și estimarea spectrului lor. Pentru atingerea scopului vizat sunt fixate următoarele obiective: studiul unor clase de quasigrupuri binare și n-are cu un număr dat de parastrofi distincți, inclusiv ortogonali; dezvoltarea unor metode de construcție a quasigrupurilor n −are parastrofic-ortogonale.

Noutatea și originalitatea științifică. În lucrare sunt introduse două clase noi de quasigrupuri binare: DC −quasigrupuri (cei șase parastrofi sunt distincți) și $totCO$-quasigrupuri (cei șase parastrofi sunt ortogonali). Problema existenței quasigrupurilor ce posedă un număr dat de parastrofi distincți și a caracterizării spectrului lor, formulată de Lindner și Steedly, este considerată pentru clasa n −quasigrupurilor liniare ($n = 2, 3, 4$), inclusiv cu sistemele maximale ortogonale de parastrofi distincți.

Problema științifică importantă soluționată constă în caracterizarea quasigrupurilor binare ce posedă 6 parastrofi distincți, respectiv 6 parastrofi ortogonali, în descrierea T-quasigrupurilor binare cu 1, 2, 3 sau 6 parastrofi distincți și a T −quasigrupurilor 4-are ce posedă numărul maximal de $1, 5, 10$ sau 20 de parastrofi distincți, inclusiv distincți și ortogonal, și estimarea spectrului lor.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele referitoare la T-formele n-T-quasigrupurilor cu un număr maximal dat de parastrofi distincți, inclusiv ortogonali, cât și metodele propuse de construcție a n-quasigrupurilor parastrofic-ortogonale, reprezintă contribuții la soluționarea problemelor deschise despre existența n-quasigrupurilor cu un număr dat de parastrofi distincți și spectrul n-quasigrupurilor parastrofic-ortogonale.

Implementarea rezultatelor științifice. Sistemele ortogonale de quasigrupuri n −are, $n \geq 2$, sunt utilizate cu succes la construirea MDS-codurilor, în criptografie, la planificarea experimentelor, în combinatorică ș.a. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în calitate de suport pentru cursuri universitare de specialitate.

ANNOTATION

of the thesis entitled **"Quasigroups with orthogonal distinct parastrophes",** presented by the candidate **Rotari Tatiana,** for obtaining the degree of Doctor in Mathematical Sciences with specialty **111.03 Mathematical logic, algebra and number theory,**

Chisinau, 2026

Structure of the thesis: the thesis is written in Romanian and consists of an introduction, four chapters, general conclusions and recommendations, a bibliography of 162 titles and 5 appendices. The thesis contains 112 pages of basic text. The obtained results were published in 27 papers with a volume of over 6,06 sheets of author.

Keywords: $n-$quasigroup, parastrophe, linear quasigroup, $T-$quasigroup, (totally) parastrophic- orthogonal quasigroup, $DC-$quasigroup, $totCO-$quasigroup.

Research purpose and objectives: The purpose of the Thesis is to obtain characterizations of n-ary quasigroups ($n = 2, 3, 4$), which possess a maximal possible number of distinct parastrophes, in particular, maximal orthogonal sets of parastrophes, as well as to estimate their spectrum. To achieve the intended goal, the following objectives are set: the study of classes of binary and $n-$ary quasigroups with a given number of distinct parastrophes, including orthogonal ones; the development of methods for constructing parastrophic-orthogonal $n-$ary quasigroups.

Scientific novelty and originality: In the present Thesis, two new classes of binary quasigroups are introduced: $DC-$ quasigroups (the six parastrophes are distinct) and $totCO-$quasigroups (the six parastrophes are orthogonal). The problem of the existence of quasigroups, which possess a given number of distinct parastrophes, and of the characterization of their spectrum, formulated by Lindner and Steedly, is considered for the class of linear n-quasigroups ($n = 2, 3, 4$), including with maximal systems of orthogonal distinct parastrophes.

The result obtained: consists in characterizing binary quasigroups possessing 6 distinct parastrophes, respectively 6 orthogonal parastrophes, in the description of binary and 4-ary $T-$quasigroups, possessing a given maximum number 1, 2, 3 or 6, and respectively, 1, 5, 10 or 20 of distinct parastrophes, including distinct and orthogonal parastrophes, and estimating their spectrum.

The theoretical significance and applicative value: The results concerning the $T-$forms of $n-T-$quasigroups with a given maximal number of distinct parastrophes, including orthogonal ones, as well as the proposed methods for constructing parastrophic-orthogonal $n-$quasigroups, represent contributions to the solution of open problems about the existence of $n-$quasigroups with a given number of distinct parastrophes and the spectrum of parastrophic-orthogonal $n-$quasigroups.

Implementation of the results: Orthogonal systems of $n-$quasigroups, $n \geq 2$, are used in the theory of MDS-codes, in criptography, planning experiments, in combinatorics etc. The results may be applied as a support for teaching courses in higher education.

АННОТАЦИЯ

к диссертации **«Квазигруппы, у которых различные парастрофы ортогональны»**, представленная **Ротарь Татианой** на соискание степени доктора математических наук наук по специальности – **111.03 Математическая логика, алгебра и теория чисел,**

Кишинёв, 2026

Структура диссертации: диссертация написана на румынском языке и состоит из введения, четырех глав, общих выводов и рекомендаций, библиографии из 162 названий и 5 приложений. Диссертация содержит 112 страниц основного текста. Полученные результаты опубликованы в 27-и научных работах с общим объёмом около 6,06 авторских листов.

Ключевые слова: n-вазигруппа, парастроф, линейная квазигруппа, T-квазигруппа, (тотально) парастрофно-ортогональная квазигруппа, DC-квазигруппа, $totCO$-квазигруппа.

Цель и задачи работы: Цель диссертации состоит в описании n-квазигрупп ($n = 2, 3, 4$), обладающих заданным числом различных парастрофов, в частности, максимальным ортогональным множествам парастрофов, а также оценить их спектр. Для достижения поставленной цели определены следующие задачи: изучение классов бинарных и n −арных квазигрупп с заданным числом различных парастрофов, включая ортогональных; разработка методов построения парастрофно-ортогональных n −квазигрупп.

Научная новизна и оригинальность: В диссертации вводятся и исследуются два новых класса квазигрупп: $DC-$ квазигруппы и $totCO-$ квазигруппы. Проблема существования квазигрупп, обладающих заданным числом различных парастроф, и описание их спектра, сформулированная Линднером и Стедли, зассматривается для класса линейных n −квазигрупп ($n = 2, 3, 4$), в том числе обладающих ортогональной системой различных парастрофов.

Решенная научная проблема: состоит в описании бинарных квазигрупп, обладающих 6 различными парастрофами, соответственно 6 ортогональными парастрофами, описании бинарных и 4-арных T −квазигрупп, обладающих максимальным числом из 1, 2, 3 или 6 и, соответственно, из 1, 5, 10 или 20 различных парастрофов, в том числе различных и ортогональных парастрофов, и оценки их спектра.

Теоретическое значение и прикладная ценность работы: Результаты, касающиеся T − форм $n - T$ − квазигрупп с заданным числом различных парастрофов, включая ортогональные, а также предложенные методы построения парастрофно-ортогональных n −квазигрупп, представляют собой вклад в решение открытых проблем существования n − квазигрупп с заданным числом различных парастрофов и описания спектра парастрофно-ортогональных n −квазигрупп.

Внедрение результатов. Ортогональные системы n −квазигрупп, $n \geq 2$, успешно применяются при построении MDS -кодов, в криптографии, при планировании экспериментов, в комбинаторике и т.д. Результаты могут быть применены для разработки специальных курсов в системе высшего образования.

ROTARI Tatiana

QUASIGRUPURI CU PARASTROFII DISTINCȚI ORTOGONALI

111.03. Logică matematică, algebră și teoria numerelor

Rezumatul tezei de doctor în științe matematice

Aprobat spre tipar: 09.04.2026
Hârtie ofset. Tipar ofset.
Coli de tipar: 2.0

Formatul hârtiei: 60×84 1/16
Tiraj: 50 exemplare
Comanda nr. ______

Tipografia Casa Presei „Tipocart”
str. Puşkin 22, of. 523, Chișinău, MD-2012