UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

ȘCOALA DOCTORALĂ ȘTIINȚE ALE NATURII

Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 512.548 (043.2)

CUZNEȚOV ELENA

EXTENSIBILITATEA ȘI DERIVABILITATEA RECURSIVĂ A QUASIGRUPURILOR

111.03. Logică matematică, algebră și teoria numerelor

Rezumatul tezei de doctor în științe matematice

Chișinău, 2026

Teza a fost elaborată în cadrul Universității de Stat din Moldova, Școala Doctorală Științe ale Naturii, Departamentul Matematică.

Conducător științific-

SÎRBU Parascovia	doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar, Universitatea de Stat din Moldova

Componența Comisiei de susținere publică a tezei de doctorat:

RUSU Andrei	doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar, Institutul de Matematică și Informatică ”V. Andrunachievici”, Universitatea de Stat din Moldova - ***președinte***
SÎRBU Parascovia	doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar, Universitatea de Stat din Moldova - ***conducător științific***
IZBAȘ Vladimir	doctor în științe fizico-matematice, conferențiar cercetător, Institutul de Matematică și Informatică ”V. Andrunachievici”, Universitatea de Stat din Moldova - ***referent***
SOKHATSKY Fedir	doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU, Ucraina - ***referent***
CHIRIAC Liubomir	doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar, Universitatea Pedagogică de Stat Ion Creangă din Chișinău - ***referent***

Susținerea tezei va avea loc la 23.06.2026, ora 10^{00} în cadrul Ședinței Comisiei de susținere publică, Școala Doctorală Științe ale Naturii, USM.
Sediul – Universitatea de Stat din Moldova, str. A. Mateevici 60, blocul 4, sala 222, MD-2009, Chișinău, Moldova.

Teza de doctor și rezumatul pot fi consultate la Biblioteca Națională a Republicii Moldova, Biblioteca Centrală a Universității de Stat din Moldova (MD-2009, mun. Chișinău, str. A. Mateevici 60), pe pagina web a ANACEC (http://www.anacec.md)

Rezumatul a fost expediat la 08.05. 2026

Președintele Comisiei de Doctorat doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar	**RUSU Andrei**
Conducător științific doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar	**SÎRBU Parascovia**
Autor:	**CUZNEȚOV Elena**

CUPRINS

1. REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea și importanța problemei abordate. Începutul dezvoltării teoriei quasigrupurilor ţine de anii 1920 și 1930. Termenul *quasigrup* a fost introdus de Ruth Moufang în 1935, unde autoarea se referea la coordonatizarea planelor proiective. Cu toate acestea, ideea conceptului de quasigrup fusese utilizată mult mai devreme de către Schroeder care, între 1873 şi 1890, a elaborat o serie de lucrări despre „aritmetica formală”, considerând structuri algebrice cu o operaţie binară în care operaţiile inverse la stânga, şi respectiv la dreapta, pot fi definite în mod unic [3, 9, 23].

Un grupoid binar (Q, A) se numeşte quasigrup dacă, pentru $\forall a, b \in Q$, ecuaţiile $A(a, x) = b$ și $A(y, a) = b$ au câte o singură soluţie în Q.

Pătratele latine reprezintă analogul combinatoric al quasigrupurilor binare finite. Numim pătrat latin de ordinul q, definit pe o mulțime Q din q elemente, orice tabel cu q linii și q coloane, la intersecția cărora se află elementele mulțimii Q, astfel încât elementele nu se repetă nici pe linii, nici pe coloane. Quasigrupurile (pătratele latine) au numeroase aplicări în practică. În particular, datorită proprietăților lor combinatorice, sunt utilizate în teoria algebrică a codurilor corectoare și detectoare de erori.

Fie $Q = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ o mulțime finită. Orice submulțime nevidă $C \subseteq Q^n$, unde $n \geq 1$, se numește cod de lungime n, sau n-cod, peste alfabetul Q. Un n-cod $C \subseteq Q^n$ este un $[n, k, d]_q$-cod dacă $|C| = q^k$, unde $|Q| = q$ și $k \geq 1$, și distanța minimală Hamming a sa este d. Se știe că parametrii unui $[n, k, d]_q$-cod verifică inegalitatea $d \leq n - k + 1$ [17, 18, 27]. Dacă un $[n, k, d]_q$-cod are distanța minimală Hamming egală cu $n - k + 1$, atunci spunem că acest cod atinge marginea superioară Singleton sau că este un MDS cod. În prezent rămâne o problemă deschisă determinarea tuturor tripletelor (n, k, d) de numere naturale astfel încât există MDS coduri C de lungime n, peste un alfabet din q elemente, cu $|C| = q^k$ și cu distanţa minimală Hamming d.

Un cod $C \subseteq Q^n$ se numește cod complet s-recursiv dacă există o funcție $f: Q^s \to Q$, unde $1 \leq s \leq n$, astfel încât orice cuvânt-cod $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in C$ verifică condiția $u_{i+s} = f(u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i+s-1})$, pentru orice $i = 0,1, \ldots, n - s - 1$, notând în acest caz $C = C(n, f)$.

Noţiunile de "derivată recursivă" şi de "quasigrup recursiv derivabil" au fost introduse în [10], unde autorii studiază MDS codurile complete recursive. Derivata recursivă de ordinul $t \geq 0$ a unui groupoid k-ar (Q, A) se notează cu $A^{(t)}$ şi se defineşte în felul următor:

$$A^{(0)} = A,$$

$$A^{(t)}(x_1^k) = A(x_{t+1}, \ldots, x_k, A^{(0)}(x_1^k), \ldots, A^{(t-1)}(x_1^k)) \text{ if } 1 \leq t < k;$$

$$A^{(t)}(x_1^k) = A(A^{(t-k)}(x_1^k), \ldots, A^{(t-1)}(x_1^k)) \text{ if } t \geq k, \forall x_1, \ldots, x_k \in Q,$$

unde cu x_1^k notăm consecutivitatea $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Un grupoid n-ar (Q, A) se numește quasigrup n-ar, sau n-quasigrup, dacă în egalitatea $A(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ oricare n dintre elementele $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ îl determină univoc pe al $(n+1)$-lea [4]. Un quasigrup k-ar (Q, A) se numeşte *recursiv r-derivabil* dacă derivatele sale recursive $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots, A^{(r)}$ sunt operaţii de quasigrup $(r \geq 0)$.

În cazul unui quasigrup binar $(Q,*)$, notând cu $\overset{t}{*}$ derivata recursivă de ordinul t a operaţiei $*$ avem:

$$x \overset{0}{*} y = x * y,$$

$$x \overset{1}{*} y = y * (x * y),$$

$$x \overset{t}{*} y = (x \overset{t-2}{*} y) * (x \overset{t-1}{*} y), \forall t \geq 2 \text{ și } \forall x, y \in Q.$$

Se știe că există quasigrupuri binare finite recursiv 1-derivabile de orice ordin finit $q \neq 1, 2, 6$ şi posibil $14, 18, 26$ [10, 21]. Unele estimări ale ordinului maximal de derivabiliate recursivă a n-quasigrupurilor finite $(n \geq 2)$ sunt date în [1, 10]. Proprietăţi generale ale quasigrupurilor n-are recursiv derivabile sunt studiate în [8, 10, 15, 16, 19].

Lungimea n a cuvintelor-cod într-un cod complet k-recursiv

$$C(n, A) = \{(x_1, \ldots, x_k, A^{(0)}(x_1^k), \ldots, A^{(n-k-1)}(x_1^k)) | x_1, \ldots, x_k \in Q\},$$

definit peste un alfabet Q din q elemente, unde $A: Q^k \to Q$ este o operaţie k-ară de quasigrup, satisface condiţia $n \leq r + k + 1$, unde r este ordinul maximal al derivabilităţii recursive a quasigrupului (Q, A). Studiul parametrilor pentru care $C(n, A)$ este un MDS cod implică, în particular, problema determinării ordinului maximal de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor k-are finite $(k \geq 2)$.

Derivabilitatea recursivă a quasigrupuilor n-are este strâns legată de ortogonalitatea derivatelor recursive [10]. Grupoizii n-ari $(Q, A_1), \ldots, (Q, A_n)$ se numesc ortogonali dacă, pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in Q$, sistemul de ecuații

$$\begin{cases} A_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \\ \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \\ A_n(x_1, \ldots, x_n) = a_n \end{cases}$$

are o singură soluție în Q. Un sistem din t operații n-are, definite pe o mulțime Q, unde $t \geq n$, se numește sistem ortogonal, dacă orice n operații ale acestui sistem sunt ortogonale [17, 18]. Un sistem de operații n-are $A_1, \ldots, A_t$, unde $t \geq 1$, definite pe o mulțime Q, se numește sistem puternic ortogonal, dacă este ortogonal sistemul $\{A_1, \ldots, A_t, E_1, \ldots, E_n\}$, unde $E_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in Q$, se numește i - selector n-ar, $i \in \{1,2, \ldots, n\}$.

În [10] se arată că un k-quasigrup defineşte un MDS cod de lungime n dacă şi numai dacă primele sale $n-k-1$ derivate recursive formează un sistem puternic ortogonal. Prin urmare operaţia de k-quasigrup ce defineşte un MDS cod recursiv de lungime n este recursiv $(n-k-1)$ – derivabilă. Pe de altă parte, se cunoaşte că un sistem de quasigrupuri binare este puternic ortogonal dacă şi numai dacă el este (simplu) ortogonal [17, 18].

O altă "proprietate specială" a quasigrupurilor binare este dată în [10]: derivatele recursive de ordin până la r ale unui quasigrup binar finit $(Q,*)$ sunt operaţii de quasigrup dacă şi numai dacă $(Q,*)$ defineşte un MDS cod recursiv de lungime $r+3$. Deci, un quasigrup binar finit $(Q,*)$ este recursiv r-derivabil dacă şi numai dacă derivatele sale recursive de ordin $\leq r$ formează un sistem ortogonal. Ultima afirmație implică faptul că nu există quasigrupuri recursiv 1-derivabile de ordinul 2 sau 6 şi că $r \leq q-2$, unde $q=|Q|$ şi r este ordinul derivabilităţii recursive a quasigrupului Q. O demonstrare algebrică a inegalității $r \leq q-2$ este dată în [24].

În [10] se arată că există quasigrupuri binare finite recursiv $(q-2)$-derivabile de orice ordin primar $q \geq 3$. Cu toate acestea, în prezent rămâne o problemă deschisă determinarea ordinului maximal r de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor k-are finite de ordinul q, pentru $k \geq 2$ şi q non-primar.

În teoria operațiilor ortogonale (pătratelor latine ortogonale) un rol important il joacă noțiunea de transversală [3, 17, 18]. Numim transversală a unui pătrat latin de ordinul n un set din n celule, luate câte una din fiecare linie și fiecare coloană a pătratului latin, astfel încât elementele din aceste celule să fie distincte două câte două. Se știe că pentru un pătrat latin L, de ordinul n, există un pătrat latin ortogonal dacă și numai dacă L se descompune în n transversale disjuncte două câte două.

Noțiunea de transversală este strâns legată de cea de substituție completă [3, 13, 14, 18, 22, 25, 26]. O funcție bijectivă $\sigma \in S_Q$ se numește substituție completă a unui quasigrup $(Q,\cdot)$ dacă este bijectivă funcția $\sigma' \colon Q \to Q,\ \ \sigma'(x) = x \cdot \sigma(x)$. Conceptul de substituție completă a fost introdus de Mann în 1942 [20]. Dacă Q este un quasigrup care posedă o substituție completă, atunci tabla sa multiplicativă este un pătrat latin cu o transversală. Reciproc, dacă L este un pătrat latin care are o transversală, atunci quasigrupul care are L ca tablă multiplicativă posedă o substituție completă. Orice grup finit de ordin impar posedă o substituție completă: în aceste grupuri funcția $x \to xx$ este bijectivă [18].

În 1967 Ryser a pus întrebarea dacă există quasigrupuri de ordin impar care nu posedă o substituție completă. Se știe că există quasigrupuri de ordin par care nu au substituții complete. În particular, Mann a demonstrat că dacă un quasigrup Q de ordinul $4k+2$ posedă un subquasigrup de ordinul $2k + 1$, atunci tabla sa multiplicativă nu are transversale. Este relevant să subliniem că, dacă Q este un quasigrup care are o substituție completă, atunci orice izotop al său are o substituție completă [17, 18].

Prelungirea unui quasigroup finit Q este construcția unui quasigroup de ordin mai mare, obținut din Q prin adjunția unui număr finit de elemente noi și redefinirea operației. Noțiunea de ”prelungire” a fost introdusă de V. Belousov în 1967 care, utilizând un quasigroup finit de ordinul n cu o substituție completă, a indicat o metodă de construcție a unui quasigrup de ordinul $n + 1$, prin adjuncția unui element nou [2, 3]. Metoda lui Belousov o generalizează pe cea dată de Bruck (1944), pentru prelungirea unui quasigrup finit idempotent, prin adjuncția unui element nou. Metode de prelungire a quasigrupurilor au fost date de asemenea de Osborn (1961), Denes și Pasztor (1963), Belyavskaya(1969), Elspas, Minnick și Short (1963), Deriyenko și Dudek (2008, 2013) și Derienko (2009) [7, 12]. Remarcăm că Yamamoto (1961) a utilizat un concept de prelungire, pe care l-a numit 1-extensie, în legătură cu construcția unor perechi de pătrate latine ortogonale. De asemenea, Yamamoto a definit și o construcție inversă pe care a numit-o 1-contracție [5, 6, 11, 28].

Scopul și obiectivele lucrării. Scopul tezei constă în caracterizarea derivabilității recursive a quasigrupurilor binare și n-are, inclusiv a prelungirilor quasigrupurilor, estimarea ordinului maximal de derivabilitate recursivă și a spectrului quasigrupurilor recursiv derivabile finite. Pentru atingerea scopului vizat sunt fixate următoarele obiective: caracterizarea derivabilității recursive a quasigrupurilor binare și a grupurilor n-are, determinarea unor noi metode de prelungire a quasigrupurilor binare finite și studiul derivabilității recursive ale prelungirilor quasigrupurilor.

Noutatea și originalitatea științifică. În lucrare sunt determinate criterii ale derivabilității recursive de ordin $n \geq 1$ ale quasigrupurilor binare și n-are, este data o metodă nouă de prelungire a quasigrupurilor binare finite prin utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o celulă, fiind caracterizat numărul de astfel de perechi de transversale în pătratele latine de ordin ≤ 5. Este demonstrată inexistența pătratelor latine de ordinul 5 cu prelungiri recursiv derivabile, obținute prin metoda dată, una dintre transversale fiind diagonala principală cu ordinea prestabilită a elementelor 1,2,3,4,5 sau 2,3,4,5,1.

Problema științifică importantă soluționată constă în determinarea condițiilor necesare și suficiente de derivabilitate recursivă de ordin arbitrar finit a unei clase de grupuri n-are, în prezentarea unei metode noi de prelungire a quasigrupurilor binare finite prin utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o celulă și caracterizarea derivabilității recursive a acestor prelungiri.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele ce țin de caracterizarea derivabilității recursive de ordin arbitrar r ale unor clase de quasigrupuri binare și n-are, precum și a prelungirilor quasigrupuilor prin diferite metode, se referă la probleme deschise din teoria quasigrupurilor ce țin de estimarea spectrului quasigrupurilor recursiv derivabile și au aplicări esențiale în teoria MDS codurilor pentru detectarea/corectarea unui număr maximal de erori, oferind noi estimări ale parametrilor acestor coduri.

Publicații la tema tezei de doctorat. Rezultatele cercetării au fost publicate în 14 lucrări științifice, inclusiv 3 articole în reviste recenzate de specialitate (1 articol fără coautori), 2 articole în culegeri de articole ale conferințelor științifice (1 articol fără coautori) și 9 rezumate la conferințe științifice (2 rezumate fără coautori).

Structura și volumul tezei. Teza este scrisă în limba română și conține: introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie din 129 de titluri, 2 anexe, 11 figuri și 16 tabele. Teza are un volum de 133 de pagini (inclusiv 104 pagini de text de bază).

Cuvinte-cheie: quasigrup, pătrat latin, transversală, derivată recursivă, quasigrup recursiv derivabil, prelungire a pătratului latin.

2. CONȚINUTUL TEZEI

Teza include trei capitole care conțin rezultatele teoretice și practice referitoare la quasigrupurile binare și n-are recursiv derivabile, metodele de prelungire a quasigrupurilor finite şi derivabilitatea recursivă a prelungirilor.

În **Introducere** este argumentată actualitatea și importanța problemei abordate, sunt formulate scopul și obiectivele cercetării, este apreciată noutatea și originalitatea științifică, cât și semnificația teoretică și valoarea aplicativă a tezei de doctorat. Problema științifică studiată scoate în evidență importanța teoretică și aplicativă a lucrării. Este prezentată o scurtă analiză a problemelor și publicații la tema tezei. La sfârșitul acestei secțiuni este prezentat un rezumat al conținutului lucrării.

Primul compartiment – ***Analiza situației în domeniul teoriei quasigrupurilor recursiv derivabile și a metodelor de prelungire a quasigrupurilor*** – cuprinde trei paragrafe. În acest capitol este trecută în revistă starea actuală în domeniul teoriei quasigrupurilor recursiv derivabile, de la apariția acestei clase de quasigrupuri în cadrul teoriei MDS codurilor. Studiul quasigrupurilor recursiv derivabile permite, în particular, construcția unor noi MDS coduri și obținerea unor noi caracterizări ale parametrilor acestor coduri (distanța minimală Hamming, lungime, numărul de cuvinte-cod etc.). Relația dintre parametrii unui cod complet recursiv, în particular, MDS cod și ordinul de derivabilitate recursivă a unui quasigrup finit pune problema existenței quasigrupurilor finite (binare sau n-are) recursiv derivabile cu ordin dat de derivabilitate recursivă. Printre problemele nesoluționate până în prezent se numără cea referitoare la existența quasigrupurilor binare recursiv 1-derivabile de ordinul 14,18 sau 26.

Prelungirea quasigrupurilor finite este o metodă cunoscută prin care pot fi obținute quasigupuri de ordin mai mare prin adăugarea unuia sau a mai multor elemente noi la un quasigrup finit şi redefinirea operaţiei acestui quasigrup. În literatura de specialitate sunt cunoscute mai multe metode de prelungire (extindere) a quasigrupurilor finite. Studiul derivabilității recursive a prelungirilor quasigrupurilor reprezintă o posibilitate de a obține caracterizări ale spectrului (ordinului) quasigrupurilor recursiv derivabile. Una dintre abordările existente în elaborarea metodelor de construcție a prelungirilor quasigrupurilor finite este cea care utilizează substituțiile complete, respectiv quasicomplete, ale quasigrupurilor. Substituțiile complete ale unui quasigrup finit definesc transversale în pătratul latin corespunzător. Astfel, metodele de prelungire a quasigrupurilor finite cu ajutorul substituțiilor complete se regăsesc în combinatorică, ca metode de extindere a pătratelor latine ce utilizează transversale ale acestor pătrate latine.

În acest capitol sunt prezentate rezultate generale referitoare la substituțiile complete ale unui quasigrup și la existența transversalelor în pătratele latine. Sunt descrise și ilustrate prin exemple metodele cunoscute de prelungire a quasigrupurilor finite (Bruck, Belousov, Belyavskaya, Dudek-Derienko ș.a.).

Prin urmare, capitolul 1 caracterizează relațiile dintre structura algebrică de quasigrup, teoria codurilor și aspecte combinatorice ale pătratelor latine, oferind un cadru teoretic riguros pentru construcția quasigrupurilor recursiv derivabile, construcția și analiza codurilor recursive cu parametri optimali, metode de construcție a prelungirilor quasigrupurilor finite (pătratelor latine).

Compartimentul al doilea – ***Quasigrupuri recursiv derivabile*** – constă din trei paragrafe. În cadrul acestui compartiment sunt prezentate proprietăți algebrice ale quasigrupurilor binare și n-are, în particular ale grupurilor binare și n-are. Sunt date criterii de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor binare, fiind caracterizată 1-derivabilitatea recursivă a parastrofilor lor (Propoziția 2.1.2), sunt determinate relații între unele grupuri (grupul multiplicativ, grupul multiplicativ la dreapta, grupul automorfismelor, grupul semiautomorfismelor) unui quasigrup recursiv 1-derivabil și cele ale derivatei sale recursive de ordinul 1 (Propozițiile 2.1.7 și 2.1.8).

Propoziția 2.1.2. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup binar. Sunt adevărate afirmațiile:*

1. ${}^{l}(\cdot)$ *este recursiv 1-derivabilă daca și numai dacă* $(\cdot)\ \bot^{lr}\ (\cdot)$*;*

2. ${}^{r}(\cdot)$ *este recursiv 1-derivabilă daca și numai dacă* ${}^{rl}(\cdot)\ \bot^{lr}\ (\cdot)$*;*

3. ${}^{rl}(\cdot)$ *este recursiv 1-derivabilă daca și numai dacă* ${}^{s}(\cdot)\ \bot^{r}\ (\cdot)$*;*

4. ${}^{lr}(\cdot)$ *este recursiv 1-derivabilă daca și numai dacă* ${}^{l}(\cdot)\ \bot^{r}\ (\cdot)$*;*

5. ${}^{s}(\cdot)$ *este recursiv 1-derivabilă daca și numai dacă* $(\cdot)\ \bot^{rl}\ (\cdot)$.

Propoziția 2.1.7. *Fie* $(Q,\circ)$ *un quasigrup recursiv 1-derivabil și fie* $(Q,\overset{1}{\circ})$ *derivata sa recursivă de ordinul 1:* $x\overset{1}{\circ}y = y\circ(x\circ y), \forall x,y\in Q$. *Atunci orice congruență a quasigrupului* $(Q,\circ)$ *este o congruență și în* $(Q,\overset{1}{\circ})$.

Propoziția 2.1.8. *Fie* $(Q,\circ)$ *un quasigrup recursiv 1-derivabil și fie* $(Q,\overset{1}{\circ})$ *derivata sa recursivă de ordinul 1. Au loc incluziunile:*

a) $RM\left(Q,\overset{1}{\circ}\right)\subseteq M(Q,\circ)$;

b) $Aut(Q,\circ)\subseteq Aut(Q,\overset{1}{\circ})$.

În Teorema 2.1.1 este caracterizată s-derivabilitatea recursivă a quasigrupului $(\mathbb{Z}_n,*)$, unde $x*y=\bar{a}\,x+y, \forall x,y\in\mathbb{Z}_n, (a,n)=1$, $(s\geq 1)$. Aplicând această teoremă, în Propoziția 2.1.10 sunt obținute exemple de quasigrupuri recursive $(q-2)$ - derivabile de ordin prim $3\leq q\leq 19$.

Teorema 2.1.1. *Fie* $n\geq 2, a=n-k, k\in\{1,\ldots,n-1\}, (a,n)=1$ *și* $x*y=\overline{a}x+y, \forall x,y\in\mathbb{Z}_n$. *Dacă, pentru un oarecare* $s\geq 1$, *derivatele recursive* $(\mathbb{Z}_n,\overset{s}{*})$ *și* $(\mathbb{Z}_n,\overset{s+1}{*})$, *unde* $x\overset{i}{*}y=\overline{u_i}x+$

$\overline{v_i}y,\ i = s, s+1$, *sunt quasigrupuri, atunci* $(\mathbb{Z}_n, \overset{s+2}{*})$ *este un quasigrup dacă şi numai dacă* $(-kc_s + c_{s+1}, n) = 1$, *unde* c_s *şi* c_{s+1} *sunt resturile de la împărţirea lui* v_s *şi* v_{s+1} *la* n, *respectiv.*

Propoziția 2.1.10. *Fie* $(\mathbb{Z}_n,*)$, *unde* $x * y = \overline{a}x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}_n$, *este un quasigrup. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1. $(\mathbb{Z}_3,*)$ *este recursiv 1-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 1$*;*
2. $(\mathbb{Z}_5,*)$ *este recursiv 3-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 3$*;*
3. $(\mathbb{Z}_7,*)$ *este recursiv 5-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 1$ *sau* 4*;*
4. $(\mathbb{Z}_{11},*)$ *este recursiv 9-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 3$ *sau* 4*;*
5. $(\mathbb{Z}_{13},*)$ *este recursiv 11-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 5{,}8$ *sau* 11*;*
6. $(\mathbb{Z}_{17},*)$ *este recursiv 15-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 7$ *sau* 10*;*
7. $(\mathbb{Z}_{19},*)$ *este recursiv 17-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 1{,}5$ *sau* 7.

În Propozițiile 2.1.4 și 2.1.5 sunt determinate toate quasigrupurile recursiv derivabile de ordin ≤ 4.

Propoziția 2.1.4. *Există exact 6 quasigrupuri de ordinul 3 recursiv 1-derivabile.*

Propoziția 2.1.5. *Există exact 48 de quasigrupuri de ordinul 4 recursiv 1-derivabile, dintre care 8 sunt recursiv 2-derivabile.*

În paragraful 2.2 sunt studiate grupurile binare recursiv derivabile. Pentru criteriul de *s*-derivabilitate recursivă a grupurilor abeliene finite, dat în [16], sunt prezentate noi condiții echivalente (Propoziția 2.2.2).

Propoziția 2.2.1. [16] *Fie* $(G,\cdot)$ *un grup abelian. Pentru orice* $\forall n \geq 3$, *și orice* $x, y, a \in G$, *au loc egalitățile:*

$$x \overset{n}{\cdot} a = x^{b_n} \cdot a^{b_{n+1}};\ a \overset{n}{\cdot} y = y^{b_{n+1}} \cdot a^{b_n},$$

unde $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este şirul lui Fibonacci:*

$$b_1 = b_2 = 1, b_k = b_{k-2} + b_{k-1}, \forall k \geq 3.$$

Propoziția 2.2.2. *Fie* $(G,\cdot)$ *un grup abelian finit și fie că* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este şirul lui Fibonacci*, unde $b_1 = b_2 = 1$. *Sunt adevărate afirmaţiile:*

1. *Grupul* $(G,\cdot)$ *este recursiv* k*-derivabil dacă şi numai dacă funcția* $\varphi_i(x) = x^{b_i}$ *este injectivă pentru fiecare* $i = \overline{1, k+1}$.
2. *Grupul* $(G,\cdot)$ *este recursiv* k*-derivabil dacă şi numai dacă* $x^{b_i} \neq e, \forall x \in G \setminus \{e\}$, $i = \overline{1, k+1}$.
3. *Orice grup abelian finit de ordin impar este recursiv 1-derivabil.*

4. *Orice grup abelian finit de ordin par nu este recursiv* 1*-derivabil.*

În ultimul paragraf al Capitolului 2 sunt cercetate quasigrupurile n-are recursiv derivabile. Rezultatul principal al acestui paragraf se conține în Teorema 2.3.1, unde este dat un criteriu de r-derivabilitate recursivă ($r \geq 1$) a grupului n-ar (Q, B), unde $B(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, $(Q,\cdot)$ fiind un grup abelian binar finit şi $n \geq 2$.

Propoziția 2.3.1. *Fie* $(Q,\cdot)$ *este un grup binar finit şi* $n \geq 2$. *Grupul* n*-ar* (Q, B), *unde* $B(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n, \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in Q$, *este recursiv 1-derivabil dacă şi numai dacă funcţia* $x \to x^2$ *este o bijecţie în* $(Q,\cdot)$.

Corolarul 2.3.1. *Există* n*-quasigrupuri finite recursiv 1-derivabile de orice ordin impar* $q \geq 3$, *pentru orice* $n \geq 2$.

Teorema 2.3.1. *Fie* $(Q,\cdot)$ *este un grup abelian binar finit şi fie* $n \geq 2, r \geq 1$ *două numere naturale. Grupul* n*-ar* (Q, B), *unde* $B(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, *pentru orice* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Q$, *este recursiv* r*-derivabil dacă şi numai dacă funcțiile* $x \to x^{s_i^k}$ *sunt bijecţii în grupul* $(Q,\cdot)$, $\forall i = 1, \ldots, n$ *şi pentru orice* $k = 1, \ldots, r$, *unde șirurile* $(s_i^k)_{k \geq 0}$ *sunt definite în felul următor:*

1. $k = 0$

$$s_1^0 = \ldots = s_n^0 = 1;$$

2. $1 \leq k < n$

$$s_t^k = s_t^0 + \ldots + s_t^{k-1},\ \forall t = 1, \ldots, k;$$

$$s_t^k = 1 + s_t^0 + \ldots + s_t^{k+1},\ \forall t = k+1, \ldots, n;$$

3. $k \geq n$

$$s_t^k = s_t^{k-n} + \ldots + s_t^{k-1},\ \forall t = 1, \ldots, n.$$

Acest rezultat generalizează în caz n-ar criteriul obținut de V. Izbash și P. Syrbu pentru grupurile abeliene finite [16].

Ultimul compartiment – ***Derivabilitatea recursivă a unor prelungiri ale quasigrupurilor*** – constă din trei paragrafe. Acest compartiment este dedicat analizei posibilității de prelungire (extindere) a unui quasigrup finit prin adjuncție de noi elemente și redefinirea operației, cât și studiului derivabilității recursive a prelungirilor.

În Paragraful 3.1 sunt determinate condiţiile necesare şi suficiente pentru ca prelungirile quasigrupurilor binare finite, obţinute utilizând construcţiile Bruck și, respectiv Belousov, să fie recursiv 1-derivabile (Teoremele 3.1.1 și 3.1.2).

Fie $(Q,\cdot)$ un quasigrup finit de ordinul q şi $Q = \{1,2,\ldots,q\}$ astfel încât funcția $x \mapsto x \cdot x$ este o bijecţie. Atunci diagonala principală a tablei Cayley a lui $(Q,\cdot)$ este o transversală, a cărei elemente sunt date de funcția $\theta: Q \mapsto Q, \theta(x) = x \cdot x.$ Bruck a considerat astfel de prelungiri pentru quasigrupurile idempotente, adică în cazul $\theta = \varepsilon$, unde ε - substituţia identică pe Q.

Conform metodei lui Bruck, prelungirea $(Q',\circ)$ a quasigrupului $(Q,\cdot)$, unde $Q = \{1,\ldots,q\}$ şi $Q' = Q \cup \{\xi\}, \xi \not\in Q$, este definită în felul următor:

$$x \circ y = \begin{cases} x \cdot y \text{ dacă } x \neq y \text{ și } x,\ y \in Q; \\ \xi \text{ dacă } x = y \text{ și } x \in Q; \\ \theta(x) \text{ dacă } y = \xi \text{ și } x \in Q; \\ \theta(y) \text{ dacă } x = \xi \text{ și } y \in Q; \\ \xi \text{ dacă } x = y = \xi. \end{cases} \quad (1)$$

Deci, prelungirea $(Q',\circ)$ este un quasigrup cu tabla Cayley:

$\circ$	1	...	q	ξ
1	ξ	...	...	$\theta(1)$
...	...	...	...	...
q	...	...	ξ	$\theta(q)$
ξ	$\theta(1)$	...	$\theta(q)$	ξ

Tabelul 3.1.

unde $x \circ y = x \cdot y$, pentru orice $x \neq y$ din Q. Remarcăm că nu orice transversală de pe diagonala principală dă o prelungire recursiv 1-derivabilă, așa cum rezultă din următoarea afirmaţie.

Propoziția 3.1.1. *Fie $(Q,\cdot)$ un quasigrup finit astfel încât funcția $\theta: Q \mapsto Q, \theta(x) = x \cdot x$ este o bijecţie. Dacă prelungirea $(Q',\circ)$ dată în (1), unde $Q' = Q \cup \{\xi\}, \xi \not\in Q$, este un quasigrup, atunci $\theta(x) \neq x, \forall x \in Q$.*

Teoremă 3.1.1. *Fie $(Q,\cdot)$ este un quasigrup finit astfel încât funcția $\theta: Q \mapsto Q, \theta(x) = x \cdot x$ este o bijecţie şi $\theta(x) \neq x, \forall x \in Q$. Atunci prelungirea $(Q',\circ)$, obţinută utilizând metoda lui Bruck, unde $Q' = Q \cup \{\xi\}$, $\xi \not\in Q$, este recursiv 1-derivabilă dacă şi numai dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:*

1. $\{f_x \mid x \in Q\} = Q$, unde $f_x \cdot x = x, \forall x \in Q$;

2. θ este o substituţie completă a lui $(Q,\cdot)$;

3. pentru orice $x \in Q, \{\theta(x), y \cdot (x \cdot y), \theta^2(x) \mid y \in Q,\ x \neq y,\ y \neq x \cdot y\} = Q$.

Metoda de prelungire a lui Belousov utilizează o transversală arbitrară a tablei Cayley, nu neapărat una de pe diagonala principală. Fie că $\{(x, \theta(x)) \mid x \in Q\}$, unde $\theta \in S_Q$, este o transversală a unui quasigrup finit $(Q,\cdot)$. Atunci funcția $\theta': Q \to Q, \theta'(x) = x \cdot \theta(x)$ este o bijecţie. Conform metodei lui Belousov, prelungirea $(Q',\circ)$, unde $Q' = Q \cup \{\xi\}$, $\xi \notin Q$, este definită în felul următor:

$$x \circ y = \begin{cases} x \cdot y \text{ dacă } y \neq \theta(x) \text{ și } x,\ y \in Q; \\ \xi \text{ dacă } y = \theta(x) \text{ și } x,\ y \in Q; \\ \theta'(\theta^{-1}(y)) \text{ dacă } x = \xi \text{ și } y \in Q; \\ \theta'(x) \text{ dacă } y = \xi \text{ și } x \in Q; \\ \xi \text{ dacă } x = y = \xi. \end{cases} \tag{2}$$

Observăm că dacă θ′ este o bijecţie, atunci (Q′,∘) este un quasigrup cu următoarea tablă Cayley:

$\circ$	...	$\theta(x)$	...	y	...	ξ
...	...	...	...	...	...	...
x	...	$\theta'(x)$	...	$x \cdot y$	...	$\theta'(x)$
...	...	...	...	...	...	...
ξ	...	...	...	$\theta'\left(\theta^{-1}(x)\right)$	...	ξ

Tabelul 3.3

Propoziția 3.1.2. *Fie $(Q,\cdot)$ un quasigrup finit și $\theta \in S_Q$ astfel încât $\theta': Q \to Q, \theta'(x) = x \cdot \theta(x)$ este o bijecţie. Atunci derivata recursivă $(Q',\overset{1}{\circ})$ a prelungirii $(Q',\circ)$ dată în (2) este următoarea:*

$$x \overset{1}{\circ} y = \begin{cases} y \cdot (x \cdot y) \ \textit{dacă} \ y \neq \theta(x \cdot y),\ y \neq \theta(x) \ \textit{și} \ x,\ y \in Q; \\ \xi \ \textit{dacă} \ y = \theta(x \cdot y),\ y \neq \theta(x) \ \textit{și} \ x,\ y \in Q; \\ \theta'(\theta(x)) \ \textit{dacă} \ y = \theta(x) \ \textit{și} \ x, y \in Q; \\ y \cdot \theta'(\theta^{-1}(y)) \ \textit{dacă} \ y \neq \theta(\theta'(\theta^{-1}(y))),\ x = \xi \ \textit{și} \ y \in Q; \\ \xi \ \textit{dacă} \ y = \theta(\theta'(\theta^{-1}(y))),\ x = \xi \ \textit{și} \ y \in Q; \\ \theta'(\theta^{-1}(\theta'(x))) \ \textit{dacă} \ y = \xi \ \textit{și} \ x \in Q; \\ \xi \ \textit{dacă} \ x = y = \xi. \end{cases}$$

Teorema 3.1.2. *Fie $(Q,\cdot)$ un quasigrup finit, $\theta \in S_Q$ astfel încât funcția $\theta': Q \mapsto Q, \theta'(x) = x \cdot \theta(x)$ este o bijecţie şi fie $\theta^{-1}(y) \neq \theta'(\theta^{-1}(y)), \forall y \in Q$. Atunci prelungirea $(Q',\circ)$, obținută prin metoda lui Belousov, este recursiv 1-derivabilă dacă şi numai dacă următoarele condiţii au loc:*

1. *$\{\theta^{-1}(y)/y \mid y \in Q\} = Q$;*
2. *substituţia $y \mapsto y \cdot \theta'(\theta^{-1}(y))$ este o bijecţie în Q;*
3. *pentru orice $x \in Q$, $\{\theta'(\theta(x)), y \cdot xy, \theta'(\theta^{-1}(\theta'(x))) | y \neq \theta(x \cdot y), y \neq \theta(x), y \in Q\} = Q$.*

În Paragraful 3.2 este propusă o metodă de construcție a prelungirilor unui quasigrup finit prin utilizarea a două trasversale (ale tablei Cayley a quasigrupului) care se intersectează într-un singur punct. Se arată că există 12 moduri de prelungire a unui pătrat latin prin această metodă. Este analizată existența unor perechi de transversale, care se intersectează exact într-un punct, atât în caz general, cât și în pătratele latine de ordinul 4 (în pătratele latine de ordinul 3 nu există astfel de perechi de transversale, precum rezultă din p. a) de mai jos). Se arată că:

a) un pătrat latin de ordinul n poate avea cel mult $n-2$ transversale care se intersectează într-un singur punct, fiind disjuncte două câte două în celelalte puncte (Propoziția 3.2.1);

Definița 3.2.1. *Numim transversală liberă a unui pătrat latin* L *de ordinul* n, *orice set din* n *celule luate exact câte una din fiecare linie și din fiecare coloană ale lui* L.

Propoziția 3.2.1. *Un pătrat latin de ordinul* n *poate avea cel mult* $n-2$ *transversale obișnuite care se intersectează într-un singur punct, fiind disjuncte 2 câte două în celelalte puncte.*

b) în orice pătrat latin de ordinul 4 există exact 96 de perechi de transversale libere, și respectiv 13824 de perechi de transversale obișnuite, care se intersectează exact într-o celulă (Propoziția 3.2.3; Corolarul 3.2.3).

Propoziția 3.2.2. *Pătratul latin de ordinul 4 posedă exact 24 de transversale libere.*

Propoziția 3.2.3. *În orice pătrat latin de ordinul 4 există exact 96 de perechi de transversale libere care se intersectează exact într-o celulă.*

Corolarul 3.2.3. *În orice pătrat latin de ordinul 4 există exact 13824 de perechi de transversale obișnuite care se intersectează exact într-o celulă.*

Fie $(Q,\cdot)$ un quasigrup finit de ordinul q și fie că tabla Cayley a quasigrupului $(Q,\cdot)$ conține 2 transversale T_1 și T_2, care au o singură celulă comună, aflată la intersecția liniei elementului x cu coloana elementului y. Notăm elementul din celula comună a transversalelor T_1 și T_2 cu a. Considerăm acum mulțimea $Q' = Q \cup \{\xi_1, \xi_2\}$, unde $\xi_1, \xi_2 \notin Q$. Pe mulțimea Q' definim operația $\circ$ în felul următor: completăm celulele, diferite de celula comună, ale unei transversale cu ξ_1, iar ale celeilalte cu ξ_2. Elementele din celulele celor două transversale, cu excepția elementului din celula comună, le transferăm păstrând ordinea lor, în celulele liniei și, respectiv, a coloanei elementelor ξ_1 și ξ_2. Celulele rămase în linia elementului x, coloana elementului y și la intersecția liniilor și a coloanelor elementelor ξ_1 și ξ_2 pot fi completate în mai multe moduri posibile, însă, urmând această metodă, există exact 12 posibilități de prelungire a quasigrupului Q prin adjuncția a două elemente noi și prin utilizarea a 2 transversale care se intersectează exact într-o celulă. Aceste posibilități sunt ilustrate în schemele de mai jos:

$$
\text{I.}\quad
\begin{array}{c|cccccc|cc}
\circ & \dots & \dots & y_0 & \dots & \dots & \xi_1 & \xi_2 \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_0 & \dots & \dots & \xi_1 & \dots & \dots & a & \xi_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline
\xi_1 & \dots & \dots & a & \dots & \dots & \xi_2 & \xi_1 \\
\xi_2 & \dots & \dots & \xi_2 & \dots & \dots & \xi_1 & a
\end{array}
\qquad
\text{II.}\quad
\begin{array}{c|cccccc|cc}
\circ & \dots & \dots & y_0 & \dots & \dots & \xi_1 & \xi_2 \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_0 & \dots & \dots & \xi_1 & \dots & \dots & a & \xi_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline
\xi_1 & \dots & \dots & \xi_2 & \dots & \dots & \xi_1 & a \\
\xi_2 & \dots & \dots & a & \dots & \dots & \xi_2 & \xi_1
\end{array}
$$

III.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1
ξ_2	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2

IV.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2
ξ_2	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1

V.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2
ξ_2	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a

VI.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a
ξ_2	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2

VII.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2
ξ_2	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1

VIII.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1
ξ_2	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2

IX.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a
ξ_2	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1

X.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1
ξ_2	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a

XI.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a
ξ_2	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2

XII.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2
ξ_2	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a

Figura 3.3

Propoziția 3.2.4. *Șase prelungiri din cele 12 posibile (Cazurile I, IV, VI, VII, X, XI), prin adjuncția a două elemente noi și utilizând două trasversale care se intersectează exact într-o celulă, nu sunt recursiv 1-derivabile.*

Problema 3.2.1. *Pot oare prelungirile unui quasigrup recursiv 1-derivabil, obținute prin utilizarea a două trasversale care se intersectează exact într-o celulă, să fie recursiv 1-derivabile?*

În ultimul paragraf al Capitolului 3 sunt studiate prelungirile quasigrupurilor finite de ordinul 5 (pătratelor latine de ordinul 5), prin metoda propusă, deci prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o singură celulă.

Propoziția 3.3.1. *Fie L un pătrat latin de ordinul 5 care posedă 2 transversale ce au o singură celulă comună, una din transversale fiind diagonala principală a lui L. Există 45 de configurații posibile pentru cele 2 trasversale libere corespunzătoare ale pătratului latin L.*

Se demonstrează că există exact 48 de pătrate latine diferite de ordinul 5, care posedă 2 transversale, dintre care una este diagonala principală T (cu ordinea fixată a elementelor), iar a doua are o singură celulă comună cu T (Propoziția 3.3.2).

Propoziția 3.3.2. *Fie L un pătrat latin de ordinul 5 diagonala principală a căruia este o transversală T, cu ordinea fixată a elementelor. Există exact 48 de pătrate latine diferite care posedă 2 transversale ce se intersectează într-o singură celulă, una din aceste transversale fiind T.*

Observăm că cele 48 de pătrate latine posedă în total 240 de perechi de transversale ce se intersectează în câte o singură celulă, una din transversalele fiecărei perechi fiind pe diagonala principală cu ordinea fixată a elementelor în ea.

În Anexa 1 sunt prezentate toate cele 240 de perechi de transversale care există în cele 48 de pătrate latine diferite, în cazul când ordinea elementelor în transversala T este 2,3,4,5,1.

Problema 1-derivabilității recursive a prelungirilor quasigrupurilor de ordinul 5, prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două transversale ce se intersectează exact într-un punct, una dintre care este diagonala principală T, este soluționată (negativ), în cazul când ordinea elementelor în transversala T este 1,2,3,4,5 sau 2,3,4,5,1 (Propoziția 3.3.3).

Propoziția 3.3.3. *Prelungirile pătratelor latine de ordinul 5 prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două transversale, cu o singură celulă comună, dintre care una din transversale este pe diagonala principală și are fixată ordinea elementelor 1,2,3,4,5 sau 2,3,4,5,1, nu sunt recursiv 1-derivabile.*

3. CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Lucrarea se referă la teoria quasigrupurilor binare și n-are recursiv derivabile, metode de prelungire (extindere) a quasigrupurilor finite și studiul derivabilității recursive a prelungirilor.

Problema principală ştiinţifică soluţionată constă în demonstrarea unui criteriu de derivabilitate recursivă de ordin arbitrar finit a unei clase de grupuri n-are, în prezentarea unei metode noi de prelungire a quasigrupurilor binare finite prin utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o celulă și caracterizarea derivabilității recursive a acestor prelungiri.

În teză sunt date caracterizări ale derivabilității recursive a quasigrupurilor binare și n-are, inclusiv a prelungirilor quasigrupurilor, sunt date estimări ale ordinului maximal de derivabilitate recursivă și a spectrului quasigrupurilor recursiv derivabile finite.

În lucrare sunt determinate criterii ale derivabilității recursive de ordin $r \geq 1$ ale quasigrupurilor binare și n-are, este data o metodă nouă de prelungire a quasigrupurilor binare finite prin utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o celulă, fiind caracterizat numărul de astfel de perechi de transversale în pătratele latine de ordin ≤ 5. Este demonstrată inexistența pătratelor latine de ordinul 5, recursiv derivabile, prelungirile cărora obținute prin metoda dată, una dintre transversale fiind diagonala principală cu o anumită ordine prestabilită a elementelor, sunt recursiv derivabile.

În cadrul tezei date sunt efectuate cercetări în domeniul teoriei quasigrupurilor recursiv derivabile şi a prelungirilor quasigrupurilor finite (pătratelor latine), iar contribuţia autorului constă în obținerea următoarelor ***rezultate principale***:

1. A fost dat un criteriu de r-derivabilitate recursivă ($r \geq 1$) a grupului n-ar (Q, B), unde $B(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ $(Q,\cdot)$ fiind un grup abelian binar finit și $n \geq 2$. Acest rezultat generalizează în caz n-ar criteriul obținut de V. Izbash și P. Syrbu pentru grupurile abeliene finite în [16].

2. A fost caracterizată s-derivabilitatea recursivă a quasigrupului $(\mathbb{Z}_n,*)$, unde $x * y = \overline{a}x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}_n$, $(a, n) = 1, s \geq 1$. Acest rezultat permite construcția quasigrupurilor liniare (peste grupul $\mathbb{Z}_q$) recursiv $(q-2)$-derivabile.

3. Au fost determinate toate quasigrupurile recursiv derivabile de ordin ≤ 4, Se arată că există 6 quasigrupuri de ordinul 3 recursiv 1-derivabile, 48 quasigrupuri recursiv 1-derivabile de ordinul 4 și 8 quasigrupuri recursiv 2-derivabile de ordinul 4 (Propozițiile 2.1.4 și 2.1.5).

4. A fost propusă o metodă de construcție a prelungirilor unui quasigrup finit prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două trasversale (ale tablei Cayley a quasigrupului) care se

intersectează într-un singur punct. A fost analizată existența unor astfel de perechi de transversale. În particular s-a arătat că:

a) un pătrat latin de ordinul n poate avea cel mult $n-2$ transversale obișnuite care se intersectează într-un singur punct, fiind disjuncte două câte două în celelalte puncte;

b) în orice pătrat latin de ordinul patru există exact 96 de perechi de transversale libere, și respectiv 13824 de perechi de transversale obișnuite, care se intersectează exact într-o celulă;

c) există exact 48 de pătrate latine diferite de ordinul 5, care posedă câte 2 transversale, dintre care una este diagonala principală T (cu ordinea fixată a elementelor), iar a doua are o singură celulă comună cu T; există exact 240 de perechi de transversale corespunzătoare celor 48 de pătrate latine diferite de ordinul 5.

5. A fost soluționată (negativ) problema 1-derivabilității recursive a prelungirilor quasigrupurilor de ordinul 5, obținute prin adjuncția a două elemente și utilizarea a două transversale ce se intersectează exact într-un punct, una dintre care este diagonala principală T, în cazul când ordinea elementelor în T este 1, 2, 3, 4, 5 sau 2, 3, 4, 5, 1 .

6. Au fost determinate condiţiile necesare şi suficiente pentru ca prelungirile quasigrupurilor binare finite, obţinute utilizând construcţiile Bruck și, respectiv Belousov, să fie recursiv 1-derivabile.

Rezultatele autorului, care se referă la tema tezei sunt publicate în [1-14].

Teza propusă spre susţinere conţine criterii de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor binare și n-are finite, precum și a prelungirilor quasigrupuilor prin diferite metode. În lucrare este propusă și studiată o nouă metodă de prelungire a quasigrupurilor finite, prin adjuncția a două elemente și utilizarea a două transversale care se intersectează într-o singură celulă.

Recomandări:

a) Metoda propusă de extindere a quasigrupurilor finite poate fi generalizată pentru orice număr potrivit de transversale ale unui pătrat latin, care se intersectează într-o singură celulă.

b) Rezultatele referitoare la 1-derivabilitatea recursivă a prelungirilor pot fi utilizate la caracterizarea derivabilității recursive a lor de ordinul $r \geq 2$.

c) Condițiile și criteriile de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor (grupurilor) binare sau n-are finite pot fi aplicate la obținerea unor estimări noi ale spectrului acestor quasigrupuri (grupuri).

d) Caracterizările referitoare la metoda nouă de prelungire a quasigrupurilor, prezentată în lucrare, pot servi ca instrument pentru cercetarea existenței unor astfel de prelungiri recursiv derivabile. În particular, rămâne o problemă deschisă existența prelungirilor de tipul dat, care sunt recursiv 1-derivabile, în cazul quasigrupurilor de ordinul 5 (caz general).

e) Rezultatele lucrării pot fi utilizate pentru cercetări ulterioare în domeniul teoriei quasigrupurilor şi în domenii adiacente ale algebrei, geometriei şi combinatoricii, în teoria codurilor şi criptografie. De asemenea, rezultatele pot fi utilizate în calitate de suport pentru cursuri universitare de specialitate.

BIBLIOGRAFIE

1. ABASHIN, A. Linear recursive MDS-codes of dimension 2 and 3. In: *Discret. Mat.* 12 (1998), pp. 140 – 153. ISSN 0924-9265
2. BELOUSOV, V. Extensions of quasigroups. In: *Izv. Akad. Nauk Mold. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Mat. Nauk*, No. 8 (1967), pp. 3 – 24. (in Russian)
3. BELOUSOV, V. *Foundations of the Theory of Quasigroups and Loops*. Nauka, Moscow, 1967. (in Russian) 224 p.
4. BELOUSOV, V. D., SANDIK, M. D. n-ary Quasi-groups and Loops. *Sib. Math. J*. 7(1) (1966), pp. 24 – 42. ISSN 0037-4466
5. BELYAVSKAYA, G. B. Contraction of quasigroups. I. In: *Bul. Akad. Stiince RSS Moldoven*, (1), 1970, pp. 6 – 12. (in Russian)
6. BELYAVSKAYA, G. B. Contraction of quasigroups. II. In: *Bul. Akad. Stiince RSS Moldoven*, (3), 1970, pp. 3 – 17. (in Russian)
7. BELYAVSKAYA, G. B. Generalized extension of quasigroups. In: *Mat. Issled*., 5(2), 1970, pp. 28 – 48. (in Russian)
8. BELYAVSKAYA, G. B. Recursively r-differentiable quasigroups within S-systems and MDS-codes. In: *Quasigroups Relat. Systems* 20 (2012), pp. 157 – 168. ISSN 1561-2848
9. BRUCK, R. H. Some results in the theory of quasigroups. In: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55 (1944), pp. 19 – 52. ISSN 0002-9947
10. COUSELO, E., GONZALEZ, S., MARKOV, V., NECHAEV, A. Recursive MDS codes and recursively differentiable quasigroups. In: *Discrete Math. Appl*. 8, No. 3 (1998), pp. 217 – 245. ISSN 0234-0860
11. DERIYENKO, I. I., DUDEK, W. A. Contractions of quasigroups and Latin squares. In: *Quasigroups Relat. Systems* 21 (2013), pp. 165 – 174. ISSN 1561-2848
12. DERIYENKO, I. I., DUDEK, W. A. On prolongations of quasigroups. In: *Quasigroups Related Systems* 16 (2008), pp. 187 – 198. ISSN 1561-2848
13. EVANS, A. B. The existence of complete mappings of finite groups. In: *Congr. Numer*. 90 (1992), pp. 65 – 75. ISSN 0384-9864
14. EVANS, A. B. The existence of complete mappings of SL(2,q), q≡3 modulo 4. In: *Finite Fields Appl*. 11 (2005), pp. 151 – 155. ISSN 1071-5797
15. IZBASH, V., SYRBU, P. On recursively differentiable binary quasigroups. In: *Proceedings of the 11-th Conf. on Applied and Industrial Mathematics (CAIM2003)*, May 29 – 31, 2003, Oradea, Romania, Vol. 1, pp. 149 – 152. ISBN 973-613-330-3

16. IZBASH, V., SYRBU, P. Recursively differentiable quasigroups and complete recursive codes. In: *Commentat. Math. Univ. Carol*. 45, No.2, (2004), pp. 257 – 263. ISSN 0010-2628
17. KEEDWELL A. D., DENES, J. *Latin Squares and their Applications,* Second Edition. Elsevier Science, 2015, 438 p. ISBN 978-0-444-63555-6
18. KEEDWELL A. D., DENES, J. *Latin Squares and their Applications*. Akadémiai Kiadó, Budapest; Academic Press, New York; English Universities Press, London, 1974. 547p. ISBN 978-0122-09-350-0
19. LARIONOVA, I., SYRBU, P. On Recursive Differentiability of Binary Quasigroups. In: *Studia Universitatis Moldaviae*, 2 (82), 2015, pp. 53 – 60. ISSN 1857-2073
20. MANN H. The construction of orthogonal latin squares. In: *Ann. Math. Stat.*, 13, 1942, pp. 418-423. ISSN 0003-4851
21. MARKOV, V., NECHAEV, A., SKAZHENIK, S., TVERITINOV, E. Pseudogeometries with clusters and an example of a recursive $[4,2,3]_{42}$-code. In: *Fundam. Prikl. Mat.*, 14(4), 2008, pp. 181 – 192. ISSN 1560-5159
22. PAIGE, L. J. Complete mappings of finite groups. In: *Pacific J. Math.*, 1(1) (1951), pp. 111 – 116. ISSN 0030-8730
23. PFLUGFELDER, H. O. *Quasigroups and loops: introduction*. Sigma Series in Pure Mathematics, 7. Heldermann Verlag, Berlin, 1990. 147 p. ISBN 978-3885-38-007-8
24. SYRBU, P. On the order of recursive differentiability of finite binary quasigroups. In: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat*., No. 3 (103) (2023), pp. 103 – 106. ISSN 1024-7696
25. WANLESS, I. M. A generalisation of transversals for latin squares. In: *Electron. J. Combin.* 9(1) (2002), R12. ISSN 1077-8926
26. WANLESS, I. M. Transversals in latin squares. In: *Quasigroups Related Systems* 15 (2007), pp. 169 – 190. ISSN 1561-2848
27. XU, L., BRUCK, J. X-code: MDS array codes with optimal encoding. In: *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(1) (1999), pp. 272 – 276. ISSN 0018–9448
28. YAMAMOTO, K. Generation principles of Latin squares. In: *Bull. Inst. Internat. Statist.*, 38: pp. 73–76, 1961.

LISTA PUBLICAȚIILOR AUTOAREI LA TEMA TEZEI

Articole în reviste din baza de date SCOPUS

1. SYRBU P., CUZNEȚOV El. On recursive 1-differentiability of the quasigroups prolongations. In: *Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat.*, 2023, No. 2 (101), 2023, pp. 102 – 109. ISSN 1024-7696

2. SYRBU P., CUZNEȚOV El. On recursively differentiable k-quasigroups. In: *Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat.*, 2022, No. 2 (99), 2022, pp. 68 – 75. ISSN 1024-7696

Articole în reviste din Registrul Național al revistelor de profil (categoria B, ANACEC)

3. CUZNEȚOV El. On a quasigroup prolongation and its recursive differentiability. In: *Acta et Commentationes Exact and Natural Sciences*, vol. 20, no. 2, 2025, pp. 25 – 39. ISSN 2537-6284

Contribuții (articole, rezumate, teze) în lucrările conferințelor și altor manifestări științifice

a. Lucrări publicate în culegeri de articole

4. CUZNEȚOV El. On a method of prolongation of quasigroups. In: *Proceedings of the International Conference dedicated to the 60th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science,* October 10 – 13, 2024, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 55 – 60. ISBN 978-9975-68-523-8

5. CUZNEȚOV El., KUZNETSOV Eu. General Boolean Algebras, Boolean Rings and Extension Algebras. In: *Proceedings of the 5th Conference on Mathematical Foundations of Informatics*, July 3 – 6, 2019, Iași, Romania, pp. 181 – 186. ISBN 978-606-714-481-9

b. Rezumate la conferințe științifice de specialitate

6. CUZNEȚOV El., SYRBU P. On a prolongation of quasigroups using two transversals. In: *Abstracts of the 32nd International Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM-2025)*, September 18 – 21, 2025, Bucharest, Romania, pp. 97 – 98. ISSN 2537-2688

7. CUZNEȚOV El. Prolongation and recursive differentiability of quasigroups. In: *Abstracts of the National conference with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations*, State University of Moldova, September 18 – 19, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, p. 216. ISBN 978-9975-62-898-3

8. CUZNEȚOV El., SYRBU P. On recursive differentiability of quasigroups prolongations. In: *Abstracts of the International Conference on Quasigroups and Related Systems (ConfQRS 2025)*, July 2 – 4, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 9 – 10. ISBN 978-9975-62-880-8

9. CUZNEȚOV El., SYRBU P. On a new quasigroup prolongation and its recursive differentiability. In: *Abstracts of the International Conference "Mathematics & IT: Research and Education" (MITRE–2025)*, June 26 – 29, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 15 – 16. ISBN 978-9975-62-879-2 (PDF)

10. CUZNEȚOV El. Recursively differentiable finite quasigroups. In: *Abstracts of the National conference with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations*, State University of Moldova, September 12 – 13, 2024, Chișinău, Republic of Moldova, p. 262. ISBN 978-9975-62-756-6

11. CUZNEȚOV El., SYRBU P. On recursive differentiability of Bruck-Belousov prolongations of quasigroups. In: *Abstracts of the 30th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM-2023)*, Iași, Romania, September 14 – 17, 2023, p. 71. ISSN 2537-2688

12. CUZNEȚOV El., SYRBU P. On recursive differentiability of some quasigroups prolongations. In: *Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2023)*, June 26 – 29, 2023, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 22 – 23. ISBN 978-9975-62-535-7

13. CUZNEȚOV El., SYRBU P. On recursively differentiable n-quasigroups. In: *Abstracts of the 29th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM-2022)*, August 25 – 27, 2022, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 161 – 163. ISBN 978-9975-76-401-8

14. CUZNEȚOV El., SYRBU P. On recursively differentiable quasigroups. In: *Abstracts of the International Virtual Conference "Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2021)*, dedicated to the 75th anniversary of Moldova State University, July 1 – 3, 2021, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 47 – 48. ISBN 978-9975-158-19-0

ADNOTARE

la teza cu titlul ”**Extensibilitatea și derivabilitatea recursivă a quasigrupuilor”,** înaintată de către candidatul – **Cuznețov Elena,** pentru conferirea titlului științific de doctor în științe matematice la specialitatea - **111.03. Logică matematică, algebră și teoria numerelor, Chișinău, 2026.**

Structura tezei: teza este scrisă în limba română și constă din introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie din 129 de titluri și 2 anexe. Teza conține 104 de pagini cu text de bază, 11 figuri și 16 tabele. Rezultatele obținute sunt publicate în 14 lucrări.

Cuvinte-cheie: quasigrup, pătrat latin, transversală, derivată recursivă, quasigrup recursiv derivabil, prelungire a pătratului latin.

Scopul lucrării: caracterizarea derivabilității recursive a quasigrupurilor binare și n-are, inclusiv a prelungirilor quasigrupurilor, estimarea ordinului maximal de derivabilitate recursivă și a spectrului quasigrupurilor recursiv derivabile finite.

Obiectivele cercetării: caracterizarea derivabilității recursive a quasigrupurilor binare și a grupurilor n-are, determinarea unor noi metode de prelungire a quasigrupurilor binare finite și studiul derivabilității recursive ale prelungirilor quasigrupurilor.

Noutatea și originalitatea științifică: În lucrare sunt determinate criterii ale derivabilității recursive de ordin $r \geq 1$ ale quasigrupurilor binare și n-are, este data o metodă nouă de prelungire a quasigrupurilor binare finite prin utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o celulă, fiind caracterizat numărul de astfel de perechi de transversale în pătratele latine de ordin ≤ 5. Este demonstrată inexistența pătratelor latine de ordinul 5 cu prelungiri recursiv derivabile, obținute prin metoda dată, una dintre transversale fiind diagonala principală cu ordinea prestabilită a elementelor 1,2,3,4,5 sau 2,3,4,5,1.

Problema științifică importantă soluționată: constă în determinarea condițiilor necesare și suficiente de derivabilitate recursivă de ordin arbitrar finit a unei clase de grupuri n-are, în prezentarea unei metode noi de prelungire a quasigrupurilor binare finite prin utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o celulă și caracterizarea derivabilității recursive a acestor prelungiri.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării: Rezultatele ce țin de caracterizarea derivabilității recursive de ordin arbitrar r ale unor clase de quasigrupuri binare și n-are, precum și a prelungirilor quasigrupuilor prin diferite metode, se referă la probleme deschise din teoria quasigrupurilor ce țin de estimarea spectrului quasigrupurilor recursiv derivabile și au aplicări esențiale în teoria MDS-codurilor pentru detectarea/corectarea unui număr maximal de erori, oferind noi estimări ale parametrilor acestor coduri

Implementarea rezultatelor științifice: Quasigrupurile recursiv derivabile n-are, $n \geq 2$, pot fi utilizate drept funcții de control la construirea MDS-codurilor și la estimarea parametrilor acestor coduri. De asemenea, caracterizarea numărului perechilor de transversale ale unui pătrat latin, care se intersectează exact într-o celulă, oferă soluții prntru probleme analogice din combinatorică. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în calitate de suport pentru cursuri universitare de specialitate.

ANNOTATION

of the thesis entitled ”**Extensibility and recursive differentiability of quasigroups**”. Presented by the candidate **Cuznețov Elena**, for obtaining the degree of Doctor in Mathematical Sciences with specialty – **111.03. Mathematical logic, algebra and number theory, Chisinau, 2026.**

Structure of the thesis: the thesis is written in Romanian and consists of an introduction, three chapters, general conclusions and recommendations, a bibliography of 129 titles and 2 appendices. The thesis contains 104 pages of basic text, 11 figures and 16 tables. The obtained results were published in 14 papers.

Keywords: quasigroup, Latin square, transversal, recursive derivative, recursively differentiable quasigroup, prolongation of Latin squares.

Research purpose: The purpose of the thesis is to characterize the recursive differentiability of binary and n-ary quasigroups, including prolongations of quasigroups, to estimate the maximal order of recursive differentiability and the spectrum of finite recursively differentiable quasigroups.

Research objectives: characterizing the recursive differentiability of binary quasigroups and n-ary groups, determining new methods of prolongation of finite binary quasigroups, and studying the recursive differentiability of quasigroup prolongations.

Scientific novelty and originality: In the present work, criteria for recursive differentiability of order $n \geq 1$ of binary and n-ary quasigroups are determined, a new method of prolongation of finite binary quasigroups is given, by using two transversals that intersect exactly in one cell, and the number of such pairs of transversals in Latin squares of order ≤ 5 is characterized. It is proved that there do not exist Latin squares of order 5 with recursively differentiable prolongations, obtained by the given method, where one of the transversals is the main diagonal with the order of elements 1,2,3,4,5 or 2,3,4,5,1.

The main scientific problem solved: consists in determining necessary and sufficient conditions of recursive differentiability of arbitrary finite order of a class of n-ary groups, in presenting a new method of prolongation of finite binary quasigroups, by using two transversals that intersect exactly in one cell, and in characterizing the recursive differentiability of such prolongations.

The significance of theoretical and practical values of the work: The results related to the characterization of the recursive differentiability of binary and n-ary quasigroups, as well as the extensions of quasigroups by various methods, refer to open problems in quasigroup theory related to the estimation of the spectrum of recursively differentiable quasigroups and have essential applications in the theory of MDS codes for detecting/correcting the maximum number of errors, providing new estimations of the parameters of such codes.

Implementation of the scientific results: Recursively differentiable n-ary quasigroups, $n \geq 2$, can be used as control functions in the construction of MDS codes and for the estimation of the parameters of these codes. The characterization of the number of pairs of transversals of a Latin square that intersect exactly in one cell, provides solutions for analogous problems in combinatorics. The results of the thesis can be used as a support for specialized university courses.

АННОТАЦИЯ

к диссертации **«Продолжение и рекурсивная дифференцируемость квазигрупп»**, представленная **Кузнецовой Еленой** на соискание степени доктора математических наук по специальности – **111.03. Математическая логика, алгебра и теория чисел, Кишинёв, 2026.**

Структура диссертации: диссертация написана на румынском языке и состоит из введения, трех глав, общих выводов и рекомендаций, библиографии из 129 названий и 2 приложений. Диссертация содержит 104 страницы основного текста 16 таблиц и 11 рисунков. Полученные результаты опубликованы в 14-и научных.

Ключевые слова: Квазигруппа, латинский квадрат, трансверсаль, рекурсивная производная, рекурсивно дифференцируемая квазигруппа, продолжение латинского квадрата.

Цель работы: Целью диссертационной работы является характеристика рекурсивной дифференцируемости бинарных и n-арных квазигрупп, включая продолжение квазигрупп, оценка максимального порядка рекурсивной дифференцируемости и спектра конечных рекурсивно дифференцируемых квазигрупп.

Задачи работы: характеристика рекурсивной дифференцируемости бинарных и n-арных квазигрупп, нахождение новых методов продолжения конечных бинарных квазигрупп и исследование рекурсивной дифференцируемости продолжений квазигрупп.

Научная новизна и оригинальность: В работе установлены критерии рекурсивной дифференцируемости порядка $n \geq 1$ бинарных и n-арных квазигрупп, а также предложен новый метод продолжения латинских квадратов с помощью двух трансверсалей, пересекающихся точно в одной клетке, и охарактеризовано число таких пар трансверсалей в латинских квадратах порядка ≤ 5. Показано несуществование латинских квадратов 5-го порядка с рекурсивно дифференцируемыми продолжениями, полученными данным методом, где одна из трансверсалей является главной диагональю с порядком элементов 1,2,3,4,5 или 2,3,4,5,1.

Решенная важная научная задача: состоит в нахождение необходимых и достаточных условий рекурсивной дифференцируемости произвольного конечного порядка класса n-арных групп, в представлении нового метода продолжения конечных бинарных квазигрупп с помощью двух трансверсалей, пересекающихся точно в одной точке (клетке), и в описании рекурсивной дифференцируемости этих продолжений.

Теоретическая значимость и прикладная ценность работы: Результаты, связанные с описанием рекурсивной дифференцируемости некоторых классов бинарных и n-арных квазигрупп, а также построение продолжений квазигрупп различными методами, относятся к открытым задачам теории квазигрупп, связанных с оценкой спектра рекурсивно дифференцируемых квазигрупп, и имеют приложения в теории МДР-кодов для обнаружения/исправления максимального числа ошибок, позволяя получать новые оценки параметров таких кодов.

Внедрение научных результатов: Рекурсивно дифференцируемые n-квазигруппы, $n \geq 2$, могут быть использованы в качестве контрольных функций при построении МДР-кодов и оценке их параметров. Характеризация числа пар трансверсалей латинского квадрата, пересекающихся точно в одной ячейке, предоставляет решения для аналогичных задач в комбинаторике. Результаты работы могут быть использованы в качестве материала для специализированных университетских курсов.

CUZNEȚOV Elena

EXTENSIBILITATEA ȘI DERIVABILITATEA RECURSIVĂ A QUASIGRUPURILOR

111.03. Logică matematică, algebră și teoria numerelor

Rezumatul tezei de doctor în științe matematice

Aprobat spre tipar: 09.04.2026
Hârtie ofset. Tipar ofset.
Coli de tipar: 2.0

Formatul hârtiei: 60×84 1/16
Tiraj: **___ exemplare**
Comanda nr. ______

Tipografia Casa Presei „Tipocart”
str. Puşkin 22, of. 523, Chișinău, MD-2012