UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
ȘCOALA DOCTORALĂ ȘTIINȚE ALE NATURII

Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 512.548 (043.3)

CUZNEȚOV ELENA

EXTENSIBILITATEA ȘI DERIVABILITATEA RECURSIVĂ A QUASIGRUPURILOR

Teză de doctor în științe matematice

111.03 Logică matematică, algebră și teoria numerelor

Conducător științific: ____________ **Sîrbu Parascovia,** conf. univ, dr. în științe fizico-matematice

Autor: ____________ **Cuznețov Elena**

CHIȘINĂU, 2026

CUPRINS

C.Z.U.: 512.548 (043.3)

ADNOTARE

Cuznețov Elena, „Extensibilitatea și derivabilitatea recursivă a quasigrupuilor”, teză de doctor în științe matematice, Chișinău, 2026

Lucrarea este scrisă în limba română și cuprinde: introducere, trei capitole, concluzii și recomandări, bibliografie din 129 de titluri, 104 pagini de text de bază, 2 anexe. Rezultatele obținute sunt publicate în 14 lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: quasigrup, pătrat latin, transversală, derivată recursivă, quasigrup recursiv derivabil, prelungire a pătratului latin.

Domeniul de studiu: teoria quasigrupurilor binare și n-are.

Scopul și obiectivele lucrării. Scopul tezei constă în caracterizarea derivabilității recursive a quasigrupurilor binare și n-are, inclusiv a prelungirilor quasigrupurilor, estimarea ordinului maximal de derivabilitate recursivă și a spectrului quasigrupurilor recursiv derivabile finite. Pentru atingerea scopului vizat sunt fixate următoarele obiective: caracterizarea derivabilității recursive a quasigrupurilor binare și a grupurilor n-are, determinarea unor noi metode de prelungire a quasigrupurilor binare finite și studiul derivabilității recursive ale prelungirilor quasigrupurilor.

Noutatea și originalitatea științifică. În lucrare sunt determinate criterii ale derivabilității recursive de ordin $r \geq 1$ ale quasigrupurilor binare și n-are, este data o metodă nouă de prelungire a quasigrupurilor binare finite prin utilizarea a două transversale care se intersectează exact într -o celulă, fiind caracterizat numărul de astfel de perechi de transversale în pătratele latine de ordin $\leq 5.$ Este demonstrată inexistența pătratelor latine de ordinul 5 cu prelungiri recursiv derivabile, obținute prin metoda dată, una dintre transversale fiind diagonala principală cu ordinea prestabilită a elementelor 1,2,3,4,5 sau 2,3,4,5,1.

Problema științifică importantă soluționată constă în determinarea condițiilor necesare și suficiente de derivabilitate recursivă de ordin arbitrar finit a unei clase de grupuri n-are, în prezentarea unei metode noi de prelungire a quasigrupurilor binare finite prin utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o celulă și caracterizarea derivabilității recursive a acestor prelungiri.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele ce țin de caracterizarea derivabilității recursive de ordin arbitrar r ale unor clase de quasigrupuri binare și n-are, precum și a prelungirilor quasigrupuilor prin diferite metode, se referă la probleme deschise din teoria quasigrupurilor ce țin de estimarea spectrului quasigrupurilor recursiv derivabile și au aplicări esențiale în teoria MDS-codurilor pentru detectarea/corectarea unui număr maximal de erori, oferind noi estimări ale parametrilor acestor coduri.

Implementarea rezultatelor științifice. Quasigrupurile recursiv derivabile n-are, $n \geq 2$, pot fi utilizate drept funcții de control la construirea MDS-codurilor și la estimarea parametrilor acestor coduri. De asemenea, caracterizarea numărului perechilor de transversale ale unui pătrat latin, care se intersectează exact într-o celulă, oferă soluții prntru probleme analogice din combinatorică. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în calitate de suport pentru cursuri universitare de specialitate.

УДК 512.548 (043.3)

АННОТАЦИЯ

Кузнецова Елена, «Продолжение и рекурсивная дифференцируемость квазигрупп», диссертация кандидата математических наук, Кишинёв, 2026 г.

Работа написана на румынском языке и включает: введение, три главы, выводы и рекомендации, библиографию из 129 наименований, 104 страниц основного текста, 2 приложения. Полученные результаты опубликованы в 14 научных работ.

Ключевые слова: Квазигруппа, латинский квадрат, трансверсаль, рекурсивная производная, рекурсивно дифференцируемая квазигруппа, продолжение латинского квадрата**.**

Область исследований: Теория бинарных и n-арных квазигрупп**.**

Цель и задачи работы. Целью диссертационной работы является характеристика рекурсивной дифференцируемости бинарных и n-арных квазигрупп, включая продолжение квазигрупп, оценка максимального порядка рекурсивной дифференцируемости и спектра конечных рекурсивно дифференцируемых квазигрупп. Для достижения данной цели поставлены следующие задачи: характеристика рекурсивной дифференцируемости бинарных и n-арных квазигрупп, определение новых методов продолжения конечных бинарных квазигрупп и исследование рекурсивной дифференцируемости продолжений квазигрупп**.**

Научная новизна и оригинальность. В работе установлены критерии рекурсивной дифференцируемости порядка $n \geq 1$ бинарных и n-арных квазигрупп, а также предложен новый метод продолжения латинских квадратов с помощью двух трансверсалей, пересекающихся точно в одной клетке, и охарактеризовано число таких пар трансверсалей в латинских квадратах порядка ≤ 5. Показано несуществование латинских квадратов 5-го порядка с рекурсивно дифференцируемыми продолжениями, полученными данным методом, где одна из трансверсалей является главной диагональю с порядком элементов 1,2,3,4,5 или 2,3,4,5,1.

Решенная важная научная задача состоит в нахождение необходимых и достаточных условий рекурсивной дифференцируемости произвольного конечного порядка класса n-арных групп, в представлении нового метода продолжения конечных бинарных квазигрупп с помощью двух трансверсалей, пересекающихся точно в одной точке (клетке), и в описании рекурсивной дифференцируемости этих продолжений**.**

Теоретическая значимость и прикладная ценность работы. Результаты, связанные с описанием рекурсивной дифференцируемости некоторых классов бинарных и n-арных квазигрупп, а также построение продолжений квазигрупп различными методами, относятся к открытым задачам теории квазигрупп, связанных с оценкой спектра рекурсивно дифференцируемых квазигрупп, и имеют приложения в теории МДР-кодов для обнаружения/исправления максимального числа ошибок, позволяя получать новые оценки параметров таких кодов**.**

Внедрение научных результатов. Рекурсивно дифференцируемые n-квазигруппы, $n \geq 2$, могут быть использованы в качестве контрольных функций при построении МДР-кодов и оценке их параметров. Характеризация числа пар трансверсалей латинского квадрата, пересекающихся точно в одной ячейке, предоставляет решения для аналогичных задач в комбинаторике. Результаты работы могут быть использованы в качестве материала для специализированных университетских курсов.

C.Z.U: 512.548 (043.3)

ANNOTATION

Cuznetov Elena, "Extensibility and recursive differentiability of quasigroups", PhD thesis in mathematical sciences, Chisinau, 2026

The work is written in Romanian and includes: introduction, three chapters, conclusions and recommendations, bibliography of 129 titles, 104 pages of basic text, 2 appendixes. The obtained results are published in 14 scientific papers.

Keywords: quasigroup, Latin square, transversal, recursive derivative, recursively differentiable quasigroup, prolongation of Latin squares.

Field of study: theory of binary and n-ary quasigroups.

The purpose and objectives of the work. The purpose of the thesis is to characterize the recursive differentiability of binary and n-ary quasigroups, including prolongations of quasigroups, to estimate the maximal order of recursive differentiability and the spectrum of finite recursively differentiable quasigroups. To achieve the intended goal, the following objectives are set: characterizing the recursive differentiability of binary quasigroups and n-ary groups, determining new methods of prolongation of finite binary quasigroups, and studying the recursive differentiability of quasigroup prolongations.

Novelty and scientific originality. In the present work, criteria for recursive differentiability of order $n \geq 1$ of binary and n-ary quasigroups are determined, a new method of prolongation of finite binary quasigroups is given, by using two transversals that intersect exactly in one cell, and the number of such pairs of transversals in Latin squares of order ≤ 5 is characterized. It is proved that there do not exist Latin squares of order 5 with recursively differentiable prolongations, obtained by the given method, where one of the transversals is the main diagonal with the order of elements 1,2,3,4,5 or 2,3,4,5,1.

The main solved scientific problem consists in determining necessary and sufficient conditions of recursive differentiability of arbitrary finite order of a class of n-ary groups, in presenting a new method of prolongation of finite binary quasigroups, by using two transversals that intersect exactly in one cell, and in characterizing the recursive differentiability of such prolongations.

The significance of theoretical and practical values of the work. The results related to the characterization of the recursive differentiability of binary and n-ary quasigroups, as well as the extensions of quasigroups by various methods, refer to open problems in quasigroup theory related to the estimation of the spectrum of recursively differentiable quasigroups and have essential applications in the theory of MDS codes for detecting/correcting the maximum number of errors, providing new estimations of the parameters of such codes.

Implementation of the scientific results. Recursively differentiable n-ary quasigroups, $n \geq 2$, can be used as control functions in the construction of MDS codes and for the estimation of the parameters of these codes. The characterization of the number of pairs of transversals of a Latin square that intersect exactly in one cell, provides solutions for analogous problems in combinatorics. The results of the thesis can be used as a support for specialized university courses.

LISTA ABREVIERILOR

$\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}^*$) - mulțimea numerelor naturale (mulțimea numerelor naturale nenule)

S_n – grupul simetric de gradul n

A_n – grupul altern de gradul n

S_Q– grupul simetric pe mulțimea Q

$\mathbb{Z}_n$ – inelul claselor de resturi modulo n

$Aut(Q,\cdot)$ – grupul automorfismelor quasigrupului $(Q,\cdot)$

$SAut(Q,\cdot)$ – mulțimea semiautomorfismelor quasigrupului $(Q,\cdot)$

$LM(Q,\cdot)$ – grupul multiplicativ la stânga al quasigrupului $(Q,\cdot)$

$RM(Q,\cdot)$ – grupul multiplicativ la dreapta al quasigrupului $(Q,\cdot)$

$M(Q,\cdot)$ – grupul multiplicativ al quasigrupului $(Q,\cdot)$

I_h – grupul substituțiilor interne ale quasigrupului $(Q,\cdot)$ în raport cu h

$E_1,\dots,E_n$ – selectorii n-ari

$A^{(s)}$ – derivata k-recursivă de ordinul s a operației A

$[n,k,d]_q$– cod – un cod C de lungime n peste un alfabet din q elemente, cu distanța minimală Hamming d și $|C| = q^k$;

$n(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod ce atinge marginea superioară Singleton;

$n^r(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod k- recursiv ce atinge marginea superioară Singleton;

$n^{ir}(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod k- recursiv idempotent, ce atinge marginea superioară Singleton;

$l(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod liniar (în sens larg) ce atinge marginea superioară Singleton;

$l^r(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod k- recursiv liniar ce atinge marginea superioară Singleton;

$l^{ir}(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod k- recursiv liniar idempotent, ce atinge marginea superioară Singleton;

$N(k,q)$ – numărul maximal de hipercuburi latine ortogonale de ordinul k, definite pe o mulțime din q elemente.

INTRODUCERE

Începutul dezvoltării teoriei quasigrupurilor ţine de anii 20–30 ai secolului XX. Termenul quasigrup a fost introdus într-o lucrare publicată de R. Moufang în anul 1935, care se referea la coordonatizarea planelor proiective. Cu toate acestea, conceptul de quasigrup fusese de fapt luat în considerare mult mai devreme de către Schroeder care, între 1873 şi 1890, a elaborat o serie de lucrări despre „aritmetica formală”: adică despre structuri algebrice cu o operaţie binară astfel încât atât operaţia inversă la stânga cât şi cea inversă la dreapta ar putea fi definite în mod unic. O astfel de structură este un quasigrup [8, 53, 71, 72, 104].

Un grupoid binar (Q, A) se numeşte quasigrup dacă, pentru $\forall a, b \in Q$, ecuaţiile $A(a,x) = b$ și $A(y,a) = b$ au câte o singură soluție în Q.

Pătratele latine reprezintă analogul combinatoric al quasigrupurilor binare finite. Numim pătrat latin de ordinul q, definit pe o mulțime Q din q elemente, orice tabel cu q linii și q coloane, la intersecția cărora se află elementele mulțimii Q, astfel încât elementele nu se repetă nici pe linii, nici pe coloane. Quasigrupurile (pătratele latine) au numeroase aplicări în practică. În particular, datorită proprietăților lor combinatorice, sunt utilizate , în teoria codurilor şi criptografie, în teoria planificării experimentelor, teoria automatelor ş. a.

Fie $Q = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ o mulțime finită. Orice submulțime nevidă $C \subseteq Q^n$, unde $n \geq 1$, se numește cod de lungime n, sau n-cod, peste alfabetul Q. Un n-cod $C \subseteq Q^n$ este un $[n,k]_q$-cod, dacă $|C| = q^k$, unde $|Q| = q$ și $k \geq 1$, iar un $[n,k]_q$-cod C este un $[n,k,d]_q$-cod dacă distanța minimală Hamming a sa este d. Se știe că parametrii unui $[n,k,d]_q$-cod verifică inegalitatea $d \leq n-k+1$. Dacă un $[n,k,d]_Q$-cod are distanța minimală Hamming egală cu $n-k+1$, atunci spunem că acest cod atinge marginea superioară Singleton. MDS codurile sunt codurile care ating marginea superioară Singleton. Literatura de specialitate referitoare la coduri detectoare și corectoare de erori, inclusiv MDS-coduri este foarte vastă în prezent [1-4, 6, 24-33, 35-41, 54, 55, 62, 63, 67, 75, 76, 78, 80, 82, 88-90, 92, 93, 97, 98, 100, 101, 105, 107-109, 112-114, 119, 124, 125, 127].

Un cod $C \subseteq Q^n$ se numește cod complet s-recursiv dacă există o funcție $f: Q^s \to Q$, unde $1 \leq s \leq n$, astfel încât orice cuvânt-cod $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \in C$ verifică condiția $u_{i+s} = f(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+s-1})$, pentru orice $i = 0,1,\dots,n-s-1$. În acest caz vom nota codul complet s-recursiv dat cu $C(n,f)$.

Noţiunile de "derivată recursivă" şi de "quasigrup recursiv derivabil" au fost introduse în [39], unde autorii studiază MDS-codurile complete recursive.

Derivata recursivă de ordinul $t \geq 0$ a unui groupoid k-ar (Q, A) se notează cu $A^{(t)}$ şi se defineşte în felul următor:

$$A^{(0)} = A,$$

$$A^{(t)}(x_1^k) = A(x_{t+1}, \dots, x_k, A^{(0)}(x_1^k), \dots, A^{(t-1)}(x_1^k)) \text{ dacă } 1 \leq t < k;$$

$$A^{(t)}(x_1^k) = A(A^{(t-k)}(x_1^k), \dots, A^{(t-1)}(x_1^k)) \text{ dacă } t \geq k, \forall x_1, \dots, x_k \in Q,$$

unde cu x_1^k notăm consecutivitatea $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Un grupoid n-ar (Q, A) se numeşte quasigrup n-ar, sau n-quasigrup, dacă în egalitatea $A(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1}$ oricare n dintre elementele $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ îl determină univoc pe al $(n+1)$-lea [11, 18, 71, 72, 81].

Un quasigrup k-ar (Q, A) se numeşte *recursiv* r*-derivabil* dacă derivatele sale recursive $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(r)}$ sunt operaţii de quasigrup ($r \geq 0$). În [69] se demonstrează că, dacă (Q, f) este un quasigrup k-ar, atunci $f^{(r)} = f\theta^r, \forall r \geq 0$, unde

$$\theta: Q^k \to Q^k,\ \theta(x_1, \dots, x_k) = (x_2, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k)).$$

Lungimea n a cuvintelor-cod într-un cod k-recursiv

$$C(n, A) = \{(x_1, \dots, x_k, A^{(0)}(x_1^k), \dots, A^{(n-k-1)}(x_1^k)) | x_1, \dots, x_k \in Q\},$$

definit peste un alfabet Q din q elemente, unde $A: Q^k \to Q$ este o operaţie k-ară de quasigrup, satisface condiţia $n \leq r + k + 1$, unde r este ordinul maximal al derivabilităţii recursive a quasigrupului (Q, A). Pe de altă parte, $C(n, A)$ este un MDS-cod dacă şi numai dacă $d = n - k + 1$, unde d este distanţa minimală Hamming a acestui cod. În prezent rămâne o problemă deschisă determinarea tuturor tripletelor (n, k, d) de numere naturale astfel încât există MDS-coduri C de lungime n, peste un alfabet din q elemente, cu $|C| = q^k$ şi cu distanţa minimală Hamming d. Această problemă generală implică, în particular, problema determinării ordinului maximal de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor k-are finite $(k \geq 2)$.

Fie $(Q, *)$ este un quasigrup binar. Notând cu $\overset{t}{*}$ derivata recursivă de ordinul t a operaţiei $*$ avem:

$$x \overset{0}{*} y = x * y,$$

$$x \overset{1}{*} y = y * (x * y),$$

$$x \overset{t}{*} y = (x \overset{t-2}{*} y) * (x \overset{t-1}{*} y),\ \forall t \geq 2 \text{ și } \forall x, y \in Q.$$

Se cunoaşte că există quasigrupuri binare finite recursiv 1-derivabile de orice ordin, excepţie fiind de ordinul 1, 2, 6, şi posibil 14, 18, 26 [39, 93]. Unele estimări ale ordinului maximal de derivabiliate recursivă a n-quasigrupurilor finite $(n \geq 2)$ sunt date în [1, 2, 20-22, 38, 40, 41, 68, 69, 85]. Proprietăţi generale ale quasigrupurilor binare recursiv derivabile sunt studiate în [15, 17, 48, 51-52, 68, 69, 86-87, 96, 115].

Derivabilitatea recursivă a quasigrupuilor n-are este strâns legată de ortogonalitatea derivatelor recursive [17, 39, 69].

Grupoizii n-ari $(Q, A_1), \dots, (Q, A_n)$ se numesc ortogonali dacă, pentru orice $a_1, \dots, a_n \in Q$, sistemul de ecuații

$$\begin{cases} A_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_n(x_1, \dots, x_n) = a_n \end{cases}$$

are o singură soluție în Q. Un sistem din t operații n-are, definite pe o mulțime Q, unde $t \geq n$, se numește sistem ortogonal, dacă orice n operații ale acestui sistem sunt ortogonale [10, 18, 61, 73, 94, 99].

Operația n-ară E_i, $i \in \{1,2, \dots, n\}$, definită pe mulțimea Q, unde $E_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, pentru orice $x_1, \dots, x_n \in Q$, se numește i - selector n-ar. Un sistem de operații n-are $A_1, \dots, A_t$, unde $t \geq 1$, definite pe o mulțime Q, se numește sistem puternic ortogonal, dacă este ortogonal sistemul $A_1, \dots, A_t, E_1, \dots, E_n$.

În [39] se arată că un k-quasigrup defineşte un MDS-cod de lungime n dacă şi numai dacă primele sale $n - k - 1$ derivate recursive formează un sistem puternic ortogonal. Prin urmare operaţia de k-quasigrup ce definește un MDS-cod recursiv de lungime n este recursiv $(n - k - 1)$ – derivabilă. Pe de altă parte, se cunoaşte că un sistem de quasigrupuri binare este puternic ortogonal dacă şi numai dacă el este (simplu) ortogonal [71-72].

O altă "proprietate specială" a quasigrupurilor binare este dată în [39]: derivatele recursive de ordin până la r ale unui quasigrup binar finit $(Q,*)$ sunt operaţii de quasigrup dacă şi numai dacă $(Q,*)$ defineşte un MDS-cod recursiv de lungime $r + 3$. Deci, un quasigrup binar finit $(Q,*)$ este recursiv r-derivabil dacă şi numai dacă derivatele sale recursive de ordin $\leq r$ formează un sistem ortogonal. Ultima afirmație implică faptul că nu există quasigrupuri recursiv 1-derivabile de ordinul

2 sau 6 şi că $r \leq q-2$, unde $q=|Q|$ şi r este ordinul derivabilităţii recursive a quasigrupului Q. O demonstrare algebrică a inegalității $r \leq q-2$ este dată în [115]. Reamintim că nu există pătrate latine ortogonale de ordinul 2 sau 6, şi numărul pătratelor latine reciproc ortogonale pe o mulţime de q elemente nu depăşeşte $q-1$ [71-72, 128].

În [39] se arată că există quasigrupuri binare finite recursiv $(q-2)$-derivabile de orice ordin primar $q \geq 3$. Cu toate acestea, în prezent rămâne o problemă deschisă determinarea ordinului maximal r de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor k-are finite de ordinul q, pentru $k \geq 2$ şi q non-primar.

În teoria operațiilor ortogonale (pătratelor latine ortogonale) un rol important il joacă noțiunea de transversală. Numim transversală a unui pătrat latin de ordinul n un set din n celule, luate câte una din fiecare linie și fiecare coloană a pătratului latin, astfel încât elementele din aceste celule să fie distincte două câte două. Noţiunea de *transversală* a fost introdusă de Euler (1779) , care a numit-o directoare. Se știe că pentru un pătrat latin L, de ordinul n, există un pătrat latin ortogonal dacă și numai dacă L se descompune în n transversale disjuncte două câte două. În particular, această proprietate o au pătratele latine care reprezintă tabla Cayley a unui grup finit de ordin impar.

Noțiunea de transversală este strâns legată de cea de substituție completă. O funcție bijectivă $\sigma \in S_Q$ se numește substituție completă a unui quasigrup $(Q,\cdot)$ dacă este bijectivă funcția $\sigma': Q \rightarrow Q,\ \sigma'(x) = x \cdot \sigma(x)$. Conceptul de substituție completă a fost introdus de Mann (1942). Dacă Q este un quasigrup care posedă o substituție completă, atunci tabla sa multiplicativă este un pătrat latin cu o transversală. Reciproc, dacă L este un pătrat latin care are o transversală, atunci quasigrupul care are L ca tablă multiplicativă posedă o substituție completă [8, 70-72]. Se știe că orice grup finit de ordin impar posedă o substituție completă: în aceste grupuri funcția $x \rightarrow xx$ este bijectivă.

Ryser (1967) a pus întrebarea dacă există quasigrupuri de ordin impar care nu posedă o substituție completă. Se ştie că există quasigrupuri de ordin par care nu au substituții complete. În particular, Mann a demonstrat că dacă quasigrupul Q de ordin $4k+2$ posedă un subquasigrup de ordinul $2k+1$, atunci tabla sa multiplicativă nu are transversale. Este relevant să subliniem că, dacă Q este un quasigrup care are o substituție completă, atunci orice quasigrup izotopic are și el o substituție completă. Belousov (1967) a demonstrat că dacă un quasigrup Q are o substituție completă, atunci la fel şi toţi parastrofii lui Q posedă substituții complete. În prezent problema caracterizării quasigrupurilor care posedă substituții complete nu este integral soluționată [16, 19, 34, 56, 59, 60, 64-66, 74, 77, 95, 102, 103, 111, 120-123].

Prelungirea unui quasigroup finit Q este construcţia unui quasigroup de ordin mai mare, obţinut din Q prin adjuncţia unui număr finit de elemente noi. Noţiunea de prelungire a fost introdusă de V. Belousov în 1967, care utilizând un quasigroup finit de ordinul n, cu o substituţie completă, a indicat o metodă de construcţie a unui quasigrup de ordinul $n+1$, prin adjuncţia unui element nou. Această metodă generalizează o metodă dată de Bruck (1944), de prelungire a unui quasigrup finit idempotent, prin adjuncţia unui element nou. Metode de prelungire a quasigrupurilor au fost date de asemenea de Osborn (1961), Denes şi Pasztor (1963), Belyavskaya(1969), Elspas, Minnick şi Short (1963), Deriyenko şi Dudek (2008, 2013) şi Derienko (2009) [7, 8, 14, 23, 42-50, 58, 71, 106, 110, 115, 118, 129].

Yamamoto (1961) a utilizat acelaşi concept, numindu-l 1-extensie, în legătură cu construcţia de perechi de pătrate latine reciproc ortogonale. De asemenea, el a definit şi o construcţie inversă pe care a numit-o 1-contracţie, ulterior studiată într-un şir de lucrări [12, 13, 57, 79, 83, 84, 126].

Scopul tezei *Extensibilitatea şi derivabilitatea recursivă a quasigrupurilor* este de a dezvolta teoria generală a quasigrupurilor recursiv derivabile, de a caracteriza derivabilitatea recursivă a unor clase de quasigrupuri, inclusiv prin elaborarea şi studiul unor metode de prelungire a quasigrupurilor finite.

Teza constă din trei capitole, Introducere, Concluzii generale şi recomandări, Bibliografie şi două anexe.

Primul compartiment, *Analiza situaţiei în domeniul teoriei quasigrupurilor recursiv derivabile şi a metodelor de prelungire a quasigrupurilor,* cuprinde trei paragrafe. În acest capitol este trecută în revistă starea actuală în domeniul teoriei quasigrupurilor recursiv derivabile, de la apariţia acestei clase de quasigrupuri în cadrul teoriei MDS-codurilor. Studiul quasigrupurilor recursiv derivabile permite, în particular, construcţia unor noi MDS-coduri şi obţinerea unor noi caracterizări ale parametrilor acestor coduri (distanţa minimală Hamming, lungime, numărul de cuvinte-cod etc.). Relaţia dintre parametrii unui cod complet recursiv, în particular, MDS-cod şi ordinul de derivabilitate recursivă a unui quasigrup finit pune problema existenţei quasigrupurilor finite (binare sau n-are) recursiv derivabile cu ordin dat de derivabilitatea recursivă. Printre problemele nesoluţionate până în prezent se numără cea referitoare la existenţa quasigrupurilor binare recursiv 1-derivabile de ordinul 14,18 sau 26.

Prelungirea quasigrupurilor finite este o metodă cunoscută prin care pot fi obţinute quasigupuri de ordin mai mare prin adăugarea unuia sau a mai multor elemente noi la un quasigrup finit şi redefinirea operaţiei acestui quasigrup. În literatura de specialitate sunt cunoscute mai multe metode de prelungire (extindere) a quasigrupurilor finite. Studiul derivabilității recursive a prelungirilor quasigrupurilor reprezintă o posibilitate de a obține caracterizări ale spectrului (ordinului) quasigrupurilor recursiv derivabile. Una dintre abordările existente în elaborarea metodelor de construcție a prelungirilor quasigrupurilor finite este cea care utilizează substituțiile complete, respectiv quasicomplete, ale quasigrupurilor. Substituțiile complete ale unui quasigrup finit definesc transversale în pătratul latin corespunzător. Astfel, metodele de prelungire a quasigrupurilor finite cu ajutorul substituțiilor complete se regăsesc în combinatorică, ca metode de extindere a pătratelor latine ce utilizează transversale ale acestor pătrate latine.

În acest capitol sunt prezentate rezultate generale referitoare la substituțiile complete ale unui quasigrup și la existența transversalelor în pătratele latine. Sunt descrise și ilustrate prin exemple metodele cunoscute de prelungire a quasigrupurilor finite (Bruck, Belousov, Belyavskaya, Dudek-Derienko ș.a.).

Prin urmare, capitolul 1 caracterizează relațiile dintre structura algebrică de quasigrup, teoria codurilor și aspecte combinatorice ale pătratelor latine, oferind un cadru teoretic riguros pentru construcția quasigrupurilor recursiv derivabile, construcția și analiza codurilor recursive cu parametri optimali, metode de construcție a prelungirilor quasigrupurilor finite (pătratelor latine).

Compartimentul al doilea, *Quasigrupuri recursiv derivabile*, constă din trei paragrafe. În cadrul acestui compartiment sunt prezentate proprietăți algebrice ale quasigrupurilor binare și n-are, în particular ale grupurilor binare și n-are. Sunt date criterii de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor binare, fiind caracterizată 1-derivabilitatea recursivă a parastrofilor lor (Propoziția 2.1.2), sunt determinate relații între unele grupuri (grupul multiplicativ, grupul multiplicativ la dreapta, grupul automorfismelor, grupul semiautomorfismelor) unui quasigrup recursiv 1-derivabil și cele ale derivatei sale recursive de ordinul 1 (Propozițiile 2.1.7 și 2.1.8). În Teorema 2.1.1 este caracterizată s-derivabilitatea recursivă a quasigrupului $(\mathbb{Z}_n,*)$, unde $x * y = \bar{a}\, x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}_n, (a,n) = 1,$ $(s \geq 1)$. Aplicând această teoremă, în Propoziția 2.1.10 sunt obținute exemple de quasigrupuri recursive $(q-2)$ - derivabile de ordin prim $3 \leq q \leq 19$.

În Propozițiile 2.1.4 și 2.1.5 sunt determinate toate quasigrupurile recursiv derivabile de ordin ≤ 4. Se arată că există 6 quasigrupuri de ordinul 3 recursiv 1-derivabile, 48 quasigrupuri recursiv 1-derivabile de ordinul 4 și 8 quasigrupuri recursiv 2-derivabile de ordinul 4.

În Tabelul 2.1 sunt date estimările cunoscute $r_0 \leq r$ pentru ordinul r de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor binare finite de ordinul $q \leq 200$.

În paragraful 2.2 sunt studiate grupurile binare recursiv derivabile. Pentru criteriul de s-derivabilitate recursivă a grupurilor abeliene finite, dat în [69], sunt prezentate noi condiții echivalente (Propoziția 2.2.2). În ultimul paragraf al Capitolului 2 sunt cercetate quasigrupurile n-are recursiv derivabile. Rezultatul principal al acestui paragraf se conține în Teorema 2.3.1, unde este dat un criteriu de r-derivabilitate recursivă $(r \geq 1)$ a grupului n-ar (Q, B), unde $B(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, $(Q,\cdot)$ fiind un grup abelian binar finit și $n \geq 2$. Acest rezultat generalizează în caz n-ar criteriul obținut de V. Izbash și P. Syrbu pentru grupurile abeliene finite în [69].

Ultimul compartiment *Derivabilitatea recursivă a unor prelungiri ale quasigrupurilor* constă din trei paragrafe. Acest compartiment este dedicat analizei posibilității de prelungire (extindere) a unui quasigrup finit prin adjuncție de noi elemente și redefinirea operației, cât și studiului derivabilității recursive a prelungirilor.

În Paragraful 3.1 sunt determinate condiţiile necesare şi suficiente pentru ca prelungirile quasigrupurilor binare finite, obţinute utilizând construcţiile Bruck și, respectiv Belousov, să fie recursiv 1-derivabile (Teoremele 3.1.1 și 3.1.2).

În Paragraful 3.2 este propusă o metodă de construcție a prelungirilor unui quasigrup finit prin utilizarea a două trasversale (ale tablei Cayley a quasigrupului) care se intersectează într-un singur punct (prezentată grafic în Figura 3.2). Se arată că există 12 moduri de prelungire a unui pătrat latin prin această metodă. Este analizată existența unor perechi de transversale, care se intersectează exact într-un punct, atât în caz general, cât și în pătratele latine de ordinul 4 (în pătratele latine de ordinul 3 nu există astfel de perechi de transversale, precum rezultă din p. a) de mai jos). Se arată că:

a) un pătrat latin de ordinul n poate avea cel mult $n-2$ transversale care se intersectează într-un singur punct, fiind disjuncte două câte două în celelalte puncte (Propoziția 3.2.1);

b) în orice pătrat latin de ordinul patru există exact 96 de perechi de transversale libere, și respectiv 13824 de perechi de transversale obișnuite, care se intersectează exact într-o celulă (Propoziția 3.2.3; Corolarul 3.2.3).

De asemenea, în acest paragraf este analizată derivabilitatea recursivă a prelungirilor, obținute prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două trasversale care se intersectează exact într-o celulă. Se constată că în 6 din cele 12 moduri de prelungire, pătratele latine obținute nu sunt recursiv 1-derivabile (Propoziția 3.2.4, Problema 3.2.1).

În ultimul paragraf al Capitolului 3 sunt studiate prelungirile quasigrupurilor finite de ordinul 5 (pătratelor latine de ordinul 5), prin metoda propusă, deci prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o singură celulă. Se demonstrează că există exact 48 de pătrate latine diferite de ordinul 5, care posedă 2 transversale, dintre care una este diagonala principală T (cu ordinea fixată a elementelor), iar a doua are o singură celulă comună cu T (Propoziția 3.3.2). În Anexa 1 sunt prezentate toate cele 240 de perechi de transversale care există în cele 48 de pătrate latine diferite, în cazul când ordinea elementelor în transversala T este 2,3,4,5,1.

Problema 1-derivabilității recursive a prelungirilor quasigrupurilor de ordinul 5, prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două transversale ce se intersectează exact într-un punct, una dintre care este diagonala principală T, este soluționată (negativ), în cazul când ordinea elementelor în transversala T este 1,2,3,4,5 sau 2,3,4,5,1 (Propoziția 3.3.3).

1. ANALIZA SITUAȚIEI ÎN DOMENIUL TEORIEI QUASIGRUPURILOR RECURSIV DERIVABILE ȘI A METODELOR DE PRELUNGIRE A QUASIGRUPURILOR

1.1. Coduri complete recursive și derivabilitatea recursivă a operațiilor de quasigrup

Noțiunea de quasigrup recursiv derivabil a apărut în teoria algebrică a MDS-codurilor [39]. Studiul codurilor complete recursive are la baza derivatele recursive ale unei funcții de control, iar atingerea marginii superioare Singleton de către aceste coduri necesită ca derivatele recursive date să formeze un sistem puternic ortogonal deci, în particular, să fie operații de quasigrup. Parametrii codurilor complete recursive depind de ordinul de derivabilitate recursivă a quasigrupului utilizat în calitate de funcție de control. Problema caracterizării parametrilor codurilor complete recursive este doar parțial soluționtă în prezent.

Definiția 1.1.1. Fie $Q = \{a_1, \dots, a_q\}, n, k \in \mathbb{N}^*$. *Un cod* $\mathbb{C} \subseteq Q^n$ *se numeşte un* $[n, k, d]_Q$*-cod, dacă* $|\mathbb{C}| = q^k$ *şi are distanţa minimală Hamming egală cu* d.

Observăm că dacă $\mathbb{C}$ este un $[n, k, d]_Q$-cod şi $|Q| = q$, atunci $k \leq n - d + 1$. În acest caz valorea $n - d + 1$ este numită marginea superioară Singleton, iar $[n, k, d]_Q$ - codurile pentru care $k = n - d + 1$ sunt MDS-coduri.

Definiția 1.1.2. *Fie* $\mathbb{C}$ *un* $[n, k, d]_Q$*-cod şi* $s \in \mathbb{N}^*$. *Poziţiile* $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_s \leq n$ *din cuvintele-cod ale codului* $\mathbb{C}$ *se numesc determinante, dacă pentru orice* $c_1, c_2, \dots, c_s \in Q$ *există un singur cuvânt* $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{C}$, *astfel încât* $u_1 = c_1, u_2 = c_2, \dots, u_s = c_s$.

Propoziția 1.1.1. [39] $[n, k, d]_Q$*-codul* $\mathbb{C}$ *atinge marginea superioară Singleton dacă şi numai dacă orice* k *poziţii ale cuvintelor-cod sunt determinante.*

Demonstrație. Utilizând marginea superioară Singleton obținem că într-un $[n, k, d]_Q$-cod are loc inegalitatea $d \leq n - k + 1$. Dacă în $\mathbb{C}$ orice k poziţii sunt determinante, atunci cuvintele codului pot coincide pe maxim $k - 1$ poziţii, deci se vor deosebi pe minim $n - (k - 1) = n - k + 1$ poziţii. Astfel, $d = n - k + 1$, deci $\mathbb{C}$ atinge marginea superioară Singleton.

Reciproc, dacă $\mathbb{C}$ atinge marginea superioară Singleton, atunci $d = n - k + 1$, deci două cuvinte ale codului $\mathbb{C}$ se deosebesc pe minim $n - k + 1$ poziţii, de unde rezultă că orice două cuvinte ce coincid pe k poziţii, coincid integral, adică orice k poziţii sunt determinante. □

Dacă $\mathbb{C}$ este un $[n,k,d]_Q$-cod ce are determinante poziţiile $1,2,\ldots,k$, atunci există un set de funcţii $f_s\colon Q^k \mapsto Q, s = \overline{1,n-k}$, astfel încât

$$\mathbb{C} = \{u \in Q^n | u = (x_1,\ldots,x_k, f_1(x_1^k),\ldots,f_{n-k}(x_1^k))\}.$$

În acest caz funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_{n-k}$ se numesc funcţii de control ale codului $\mathbb{C}$.

Propoziția 1.1.2. [39] *Fie* $\mathbb{C}$ *un* $[k+1,k,d]_Q$*-cod, având determinante poziţiile* $1,2,\ldots,k$ *şi fie* $f_1\colon Q^k \mapsto Q$ *funcţia sa de control. Grupoidul* (Q, f_1) *este un quasigrup, de aritate* k*, dacă şi numai dacă* $\mathbb{C}$ *atinge marginea superioară Singleton.*

Demonstrație. Dacă (Q, f_1) este un k - quasigrup, atunci orice k elemente ale cuvântului $(x_1, x_2, \ldots, x_k, f_1(x_1^k))$ determină univoc elementul al $(k+1)$-lea, deci orice k poziţii ale cuvintelor codului $\mathbb{C} = \{u \in Q^{k+1} | u = (x_1, x_2, \ldots, x_k, f_1(x_1^k))\}$ sunt determinante. Conform propoziţiei precedente codul $\mathbb{C}$ atinge marginea superioară Singleton. □

Reciproc, dacă $\mathbb{C}$ atinge marginea superioară Singleton, atunci orice k poziţii ale cuvintelor sale $(x_1, x_2, \ldots, x_k, f_1(x_1^k))$ sunt determinante. Prin urmare, în egalitatea $f_1(x_1^k) = x_{k+1}$ orice k dintre elementele $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ determină univoc elementul al $(k+1)$-lea, adică (Q, f_1) este un quasigrup k −ar. □

Un $[k+1,k,d]_Q$-cod $\mathbb{C} = \{u \in Q^{k+1} | u = (x_1, x_2, \ldots, x_k, f_1(x_1^k))\}$, unde (Q, f_1) este un quasigrup k −ar, atinge marginea superioară Singleton, deci are distanţa minimală Hamming $d = k+1-k+1 = 2$.

Propoziția 1.1.3. [39] *Fie* $\mathbb{C}$ *un* $[n,k,d]_Q$*-cod ce atinge marginea superioară Singleton. Atunci există operaţii* k*-are de quasigrup* $f_1, \ldots, f_{n-k}$*, definite pe* Q*, astfel încât*

$$\mathbb{C} = \{u \in Q^n | u = (x_1, x_2, \ldots, x_k, f_1(x_1^k), \ldots, f_{n-k}(x_1^k))\}.$$

Demonstrație. Deoarece $\mathbb{C}$ atinge marginea superioară Singleton rezultă că orice k poziţii ale cuvintelor sale sunt determinante, în particular sunt determinante poziţiile $1,2,\ldots,k$. Prin urmare, există funcțiile $f_i\colon Q^k \mapsto Q, i = \overline{1,n-k}$ astfel încât

$$\mathbb{C} = \{u \in Q^n | u = (x_1, x_2, \ldots, x_k, f_1(x_1^k), \ldots, f_{n-k}(x_1^k))\}.$$

Mai mult, orice k elemente dintre $x_1, \ldots, x_k, f_i(x_1^k)$, unde $i = \overline{1,n-k}$, determină univoc elementul al $(k+1)$-lea,de unde rezultă că (Q, f_i) este un quasigrup de aritate k, pentru orice $i = \overline{1,n-k}$. □

Observăm că reciproca ultimei propoziţii în caz general, pentru $k \geq 3$, nu este adevărată. Astfel, dacă $f_1, f_2, \ldots, f_{n-k}$ sunt quasigrupuri de aritate k, atunci nu rezultă că codul

$$\mathbb{C} = \{u \in Q^n | u = (x_1, x_2, \ldots, x_k, f_1(x_1^k), \ldots, f_{n-k}(x_1^k))\}$$

are determinante orice k poziţii, precum rezultă din următorul exemplu.

Exemplul 1.1.1. Fie Q - mulţimea numerelor raţionale, $k = 4, n = 6$. Pe mulțimea Q considerăm operaţiile 4-are f_1, f_2, definite în felul următor:

$$f_1(x_1^4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4;$$

$$f_2(x_1^4) = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4.$$

Este clar că (Q, f_1) şi (Q, f_2) sunt quasigrupuri 4-are. Considerăm $[6,4,d]_Q$-codul

$$\mathbb{C} = \{u \in Q^6 | u = (x_1, x_2, x_3, x_4, f_1(x_1^4), f_2(x_1^4))\}.$$

În cuvântul codului $\mathbb{C}$ poziţiile 3, 4, 5, 6 nu sunt determinante, deoarece pentru $x_3 = a_1, x_4 = a_2$, $f_1(x_1^4) = a_3, f_2(x_1^4) = a_4$, obţinem:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, a_1, a_2) = a_3 \\ f_2(x_1, x_2, a_1, a_2) = a_4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + a_1 + a_2 = a_3 \\ x_1 + x_2 + a_1 + 2a_2 = a_4 \end{cases}$$

deci elementele x_1 şi x_2 nu sunt univoc determinate.

În continuare vom găsi condiţiile în care este adevărată şi reciproca ultimei propoziţii.

Definiția 1.1.3. *Sistemul* $\{A_1, A_2, \ldots, A_t\}_{t \geq 1}$ *de operaţii* n*-are definite pe o mulţime* $Q (n \geq 2)$ *se numeşte sistem puternic ortogonal, dacă este ortogonal sistemul* $\{E_1, \ldots, E_n, A_1, \ldots, A_t\}$, *unde* $E_1, \ldots, E_n$ *sunt selectorii* n*-ari definiţi pe mulţimea* Q.

Un grupoid n-ar (Q, A) este un quasigrup *n*-ar dacă şi numai dacă sistemul de operații $\{E_1, \ldots, E_n, A\}$ este ortogonal, unde $E_1, \ldots, E_n$ sunt selectorii n-ari definiţi pe Q în felul următor:

$$E_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i, \forall x_1, \ldots, x_n \in Q.$$

Această afirmație rezultă din faptul că ecuaţia $A(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) = a_{n+1}$ are o soluție unică, pentru $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, a_{n+1} \in Q$, dacă şi numai dacă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} E_1(x_1^n) = a_1 \\ \dots \\ E_{i-1}(x_1^n) = a_{i-1} \\ A(x_1^n) = a_{n+1} \\ E_{i+1}(x_1^n) = a_{i+1} \\ \dots \\ E_n(x_1^n) = a_n \end{cases}$$

are soluţie unică, pentru $\forall a_1, \dots, a_{i_1}, a_{i+1}, \dots, a_n, a_{n+1} \in Q$, deci dacă şi numai dacă sistemul $\{E_1, \dots, E_{i-1}, A, E_{i+1}, \dots, E_n\}$ este ortogonal. Astfel obținem că operaţiile unui sistem puternic ortogonal, diferite de selectori, sunt operaţii de quasigrup.

Propoziția 1.1.4. [71] *Orice sistem ortogonal de quasigrupuri binare este un sistem puternic ortogonal.*

Operaţia binară A este o operaţie de quasigrup dacă şi numai dacă sistemul $\{E, F, A\}$ este ortogonal. Prin urmare sistemul de quasigrupuri binare $\{A_1, A_2, \dots, A_t\}_{t\geq 2}$ este ortogonal dacă şi numai dacă este ortogonal sistemul $\{E, F, A_1, \dots, A_t\}$, deci dacă şi numai dacă sistemul $\{A_1, A_2, \dots, A_t\}_{t\geq 2}$ este un sistem puternic ortogonal.

Propoziția 1.1.5. [39] *Fie* $\mathbb{C}$ *un* $[n, k, d]_Q$*-cod, având determinante pozițiile* $1,2, \dots, k$ *şi fie* $f_1, \dots, f_{n-k}$ *funcţiile de control ale codului* $\mathbb{C}$*. Codul* $\mathbb{C}$ *atinge marginea superioară Singleton dacă şi numai dacă* $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-k}\}$ *este un sistem puternic ortogonal.*

Demonstrație. Dacă $\mathbb{C}$ atinge marginea superioară Singleton, atunci orice k poziţii în cuvintele lui sunt determinante, deci $f_1, \dots, f_{n-k}$ sunt quasigrupuri n-are. Mai mult, deoarece în cuvintele $u = (x_1^k, f_1(x_1^k), \dots, f_{n-k}(x_1^k))$ orice k poziţii sunt determinante, rezultă că sistemul $\{E_1, \dots, E_k, f_1, \dots, f_{n-k}\}$ este ortogonal, deci $\{f_1, \dots, f_{n-k}\}$ este un sistem puternic ortogonal.
Reciproc, dacă $\{f_1, \dots, f_{n-k}\}$ este un sistem puternic ortogonal, atunci sistemul $\{E_1, \dots, E_k, f_1, \dots, f_{n-k}\}$ este ortogonal, deci orice k poziţii în cuvântul $u = (x_1^k, f_1(x_1^k), \dots, f_{n-k}(x_1^k))$ sunt determinante. Prin urmare codul $\mathbb{C}$ atinge marginea superioară Singleton. □

Corolarul 1.1.1. [39] *Fie* $\mathbb{C}$ *un* $[n, 2, d]_Q$*-cod, având determinante poziţiile 1, 2 şi fie* $f_1, \dots, f_{n-2}$ *funcţiile de control. Codul* $\mathbb{C}$ *atinge marginea superioară Singleton dacă şi numai dacă* $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-2}\}$ *este un sistem ortogonal de quasigrupuri binare.*

Demonstrație. Într-adevăr, în acest caz sistem ortogonal de quasigrupuri binare este un sistem puternic ortogonal. □

Fie F un câmp de caracteristica zero şi $f_s: F^k \mapsto F, f_s(x_1^k) = \alpha_{s1}x_1 + \ldots + \alpha_{sk}x_k$, $s = \overline{1, n-k}$ Considerăm $[n, k, d]_F$-codul

$$\mathbb{C} = \{u \in F^n | u = (x_1, \ldots, x_k, f_1(x_1^k), \ldots, f_{n-k}(x_1^k))\}$$

cu poziţiile determinante $1,2, \ldots, k$ şi funcţiile de control $f_1, \ldots, f_{n-k}$.

Propoziția 1.1.6. [39] *Codul* $\mathbb{C} = \{u \in F^n | u = (x_1, \ldots, x_k, f_1(x_1^k), \ldots, f_{n-k}(x_1^k))\}$ *atinge marginea superioară Singleton dacă şi numai dacă orice minor al matricei*

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-k,1} & \alpha_{n-k,2} & \ldots & \alpha_{n-k,k} \end{bmatrix}$$

este nenul.

Fie F un câmp de caracteristica zero şi $f_s: F^k \mapsto F, f_s(x_1^k) = \alpha_{s1}x_1 + \ldots + \alpha_{sk}x_k, s = \overline{1, n-k}$. Sistemul de operaţii $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-k}\}$ de aritate k, definite pe F, este un sistem puternic ortogonal dacă şi numai dacă orice minor al matricei M este nenul. Prin urmare, codul

$$\mathbb{C} = \{u \in F^n | u = (x_1, \ldots, x_k, f_1(x_1^k), \ldots, f_{n-k}(x_1^k))\}$$

atinge marginea superioară Singleton dacă şi numai dacă orice minor al matricei M este nenul.

Definiția 1.1.4. *Un* $[n, k, d]_Q$ *-cod* $\mathbb{C}$ *se numeşte* complet k-recursiv *dacă există o funcţie* $f: Q^k \mapsto Q$, *astfel încât în orice cuvânt-cod* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}$, $\forall i = \overline{1, n-k}$, *componentele verifică condiția*

$$u_{i+k} = f(u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i+k-1}).$$

Notăm în acest caz $\mathbb{C} = \mathbb{C}(n; f)$. Noţiunea de cod complet k-recursiv sugerează următoarea definiţie a noțiunii de derivată recursivă.

Fie $f: Q^k \mapsto Q$ o funcţie. Definim funcţiile $f^{(r)}: Q^k \mapsto Q, r \in \mathbb{N}$ în felul următor:

$$f^{(0)}(x_1^k) = f(x_1^k);$$

$$f^{(1)}(x_1^k) = f(x_2^k, f^{(0)}(x_1^k));$$

$$f^{(2)}(x_1^k) = f(x_3^k, f^{(0)}(x_1^k), f^{(1)}(x_1^k));$$

...

$$f^{(s)}(x_1^k) = f(x_{s+1}^k, f^{(0)}(x_1^k), \dots, f^{(s-1)}(x_1^k)), \quad 1 \le s \le k-1;$$

$$f^{(s)}(x_1^k) = f(f^{(s-k)}(x_1^k), \dots, f^{(s-1)}(x_1^k)), \ s \ge k.$$

Funcţia $f^{(r)}$ se numeşte derivata k-recursivă de ordinul r a funcţiei f.

Dacă $\mathbb{C}(n; f)$ este un $[n, k, d]_Q$-cod complet k-recursiv, atunci cuvintele lui au forma: $u = (x_1^k, f^{(0)}(x_1^k), \dots, f^{n-k-1}(x_1^k))$, unde $f^{(0)}, \dots, f^{n-k-1}$ sunt derivate k-recursive ale funcţiei f. Astfel definiţia codului complet k-recursiv poate fi dată în felul următor:

Definiția 1.1.5. $[n, k, d]_Q$*-codul* $\mathbb{C}$ *se numeşte cod complet* k*-recursiv, dacă există o funcţie* $f: Q^k \mapsto Q$*, astfel încât* $\mathbb{C} = \{u \in Q^n | u = (x_1^k, f^{(0)}(x_1^k), \dots, f^{n-k-1}(x_1^k))\}$.

Un $[n, k, d]_Q$-cod complet k-recursiv $\mathbb{C}(n; f)$ are poziţiile $1,2, \dots, k$ determinante, deci acest cod atinge marginea superioară Singleton dacă şi numai dacă sistemul de operaţii k-are $\{f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(n-k)}\}$ este puternic ortogonal.

În cazul $k = 2$ condiţiile impuse asupra derivatelor k-recursive ale funcţiei f pot fi simplificate, după cum rezultă din propoziția următoare.

Propoziția 1.1.7. [39] *Derivatele 2-recursive* $f^{(0)}, \dots, f^{(n)}$ *sunt quasigrupuri dacă şi numai dacă codul complet 2-recursiv* $\mathbb{C}(n+3; f) = \{u \in Q^{n+3} | u = (x_1, x_2, f^{(0)}(x_1^2), \dots, f^n(x_1^2))\}$ *atinge marginea superioară Singleton.*

Demonstrație. Dacă $\mathbb{C}(n+3; f)$ atinge marginea superioară Singleton, atunci funcţiile $\{f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(n)}\}$ formează un sistem puternic ortogonal, deci sunt quasigrupuri binare.
Reciproc, fie că derivatele 2-recursive $f^{(0)}, \dots, f^{(n)}$ ale quasigrupului binar f sunt quasigrupuri. Trebuie de arătat că $\{f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(n)}\}$ formează un sistem puternic ortogonal, însă aşa cum aceste operaţii sunt binare, este suficient de arătat că sistemul $\{f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(n)}\}$ este ortogonal. Aplicăm inducţia matematică după n.

Pentru $n = 0$, codul $\mathbb{C}(3; f) = \{u \in Q^3 | u = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))\}$ atinge marginea superioară Singleton deoarece f este quasigrup.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru $n = t - 1$: codul $\mathbb{C}(t+2; f)$, unde $m \le t + 2$ atinge marginea superioară Singleton.

Fie $n = t$ şi considerăm codurile:

$$\mathbb{C}(t+3;f) = \{u \in Q^{t+3} | u = (x_1, x_2, f^{(0)}(x_1^2), \dots, f^t(x_1^2))\} \text{ şi}$$

$$\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}(t+2;f) = \{u \in Q^{t+2} | u = (x_1, x_2, f^{(0)}(x_1^2), \dots, f^{t-1}(x_1^2))\}.$$

Conform presupunerii inductive, codul $\mathbb{C}_1$ atinge marginea superioară Singleton, deci în $\mathbb{C}_1$ avem $d = t + 2 - 2 + 1 = t + 1$. Vom arăta că în $\mathbb{C}$ avem: $d = t + 3 - 2 + 1 = t + 2$, adică atinge marginea superioară Singleton.

Fie $u, v \in \mathbb{C}, u \neq v; d(u, v) \leq t + 1$.

$$u = (x_0, y_0, f^{(0)}(x_0, y_0), \dots, f^{(t-1)}(x_0, y_0), f^{(t)}(x_0, y_0)),$$

$$v = (x_1, y_1, f^{(0)}(x_1, y_1), \dots, f^{(t-1)}(x_1, y_1), f^{(t)}(x_1, y_1)).$$

Deoarece $u \neq v$, rezultă că $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$.

Considerăm $u_1, v_1 \in \mathbb{C}_1$, unde

$$u_1 = (x_0, y_0, f^{(0)}(x_0, y_0), \dots, f^{(t-1)}(x_0, y_0)),$$

$$v_1 = (x_1, y_1, f^{(0)}(x_1, y_1), \dots, f^{(t-1)}(x_1, y_1)).$$

Deoarece $d = t + 1$ în $\mathbb{C}_1$, avem: $d(u_1, v_1) \geq t + 1$. Presupunem că în $\mathbb{C}$ avem $d < t + 2$, adică $\mathbb{C}$ nu atinge marginea superioară Singleton. Atunci $d(u, v) \leq t + 1$ şi, deoarece $d(u_1, v_1) = t + 1$, obţinem $f^{(t)}(x_0, y_0) = f^{(t)}(x_1, y_1)$. Considerăm cuvintele u_2, v_2, unde

$$u_2 = (y_0, f^{(0)}(x_0, y_0), \dots, f^{(t)}(x_0, y_0)), v_2 = (y_1, f^{(0)}(x_1, y_1), \dots, f^{(t)}(x_1, y_1)).$$

Dacă notăm $y_0 = x_2, f^{(0)}(x_0, y_0) = y_2; y_1 = x_3, f^{(0)}(x_1, y_1) = y_3$, obţinem:

$$f^{(1)}(x_0, y_0) = f(y_0, f^{(0)}(x_0, y_0)) = f(x_2, y_2),$$

$$f^{(2)}(x_0, y_0) = f(f^{(0)}(x_0, y_0), f^{(1)}(x_0, y_0)) = f(y_2, f^{(0)}(x_2, y_2)) = f^{(1)}(x_2, y_2),$$

$$\dots$$

$$f^{(t)}(x_0, y_0) = f^{(t-1)}(x_2, y_2),$$

şi analog,

$$f^{(1)}(x_1, y_1) = f(x_3, y_3),$$

$$f^{(2)}(x_1, y_1) = f^{(1)}(x_3, y_3),$$

$$\dots$$

$$f^{(t)}(x_1, y_1) = f^{(t-1)}(x_3, y_3).$$

Prin urmare,

$$u_2 = (x_2, y_2, f^{(0)}(x_2, y_2), \dots, f^{(t-1)}(x_2, y_2)) \in \mathbb{C}_1,$$

$$v_2 = (x_3, y_3, f^{(0)}(x_3, y_3), \dots, f^{(t-1)}(x_3, y_3)) \in \mathbb{C}_1,$$

şi atunci, conform presupunerii inductive, $d(u_2, v_2) \geq t + 1$. Deoarece $f^{(t)}(x_0, y_0) = f^{(t)}(x_1, y_1)$, avem $f^{(t-1)}(x_2, y_2) = f^{(t-1)}(x_1, y_1)$, deci $d(u_2, v_2) = t + 1$, rezultă că cuvintele $(y_0, f^{(0)}(x_0, y_0), \dots, f^{(t-1)}(x_0, y_0))$ şi $(y_1, f^{(0)}(x_1, y_1), \dots, f^{(t-1)}(x_1, y_1))$ se deosebesc pe toate poziţiile din cuvintele $u_1, v_1, d(u_1, v_1) \geq t + 1$, rezultă că $x_0 = x_1$.
Deci am obţinut

$$\begin{cases} x_0 = x_1 \\ f^{(t)}(x_0, y_0) = f^{(t)}(x_1, y_1) \end{cases} \Rightarrow y_0 = y_1 \Rightarrow u = v.$$

Contradicţie. Prin urmare, în $\mathbb{C}$ avem $d = t + 2$, adică $\mathbb{C}$ atinge marginea superioară Singleton. □

Pentru caracterizarea parametrilor codurilor complete k-recursive este utilă noțiunea de produs cartezian al acestor coduri.

Definiția 1.1.6. *Fie* $\mathbb{C}_1 \subseteq Q^n$ *şi* $\mathbb{C}_2 \subseteq R^n$ *două coduri de lungime* n *peste alfabetele* Q *şi* R*, respectiv. Codul* $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2 \subseteq (Q \times R)^n$*, unde*

$$\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2 = \{w = ((u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)) | u = (u_1^n) \in \mathbb{C}_1; v = (v_1^n) \in \mathbb{C}_2\}$$

se numeşte produsul cartezian al codurilor $\mathbb{C}_1$ *şi* $\mathbb{C}_2$.

Dacă $\mathbb{C}_1$ este un $[n, k]_Q$-cod şi $\mathbb{C}_2$ este un $[n, k]_R$-cod, atunci $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2$ este un $[n, k]_{Q \times R}$ -cod, $|\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2| = |Q|^k \cdot |R|^k = (|Q| \cdot |R|)^k = |Q \times R|^k$.

Propoziția 1.1.8. [39] *Fie* $\mathbb{C}_1$ *un* $[n, k]_Q$ *-cod şi* $\mathbb{C}_2$ *un* $[n, k]_R$ *-cod. Codul* $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2$ *are determinante poziţiile* $1,2, \dots, k$ *dacă şi numai dacă fiecare dintre codurile* $\mathbb{C}_1$ *şi* $\mathbb{C}_2$ *are determinante poziţiile* $1,2, \dots, k$.

Demonstrație. Fie că $\mathbb{C}_1$ şi $\mathbb{C}_2$ au determinante poziţiile $1,2, \dots, k$. Atunci există $f_i: Q^k \mapsto Q, i = \overline{1, n-k}$, şi există $g_i: R^k \mapsto R, i = \overline{1, n-k}$ astfel încât

$$\mathbb{C}_1 = \{u = Q^n | u = (x_1^k, f_1(x_1^k), \dots, f_{n-k}(x_1^k))\} \text{ şi}$$

$$\mathbb{C}_2 = \{v = R^n | v = (y_1^k, g_1(y_1^k), \dots, g_{n-k}(y_1^k))\}.$$

Avem:

$$\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2 = \{w \in (Q \times R)^n | w = (w_1^k, h_1(w_1^k), \dots, h_{n-k}(w_1^k))\},$$

unde $w_i = (x_i, y_i), i = \overline{1,k}, h_j(w_1^k) = (f_j(x_1^k), g_j(y_1^k)), h_j: (Q \times R)^k \mapsto Q \times R, j = \overline{1, n-k}$. Deci dacă $\mathbb{C}_1$ şi $\mathbb{C}_2$ au determinante poziţiile $1,2,\dots,k$, atunci codul $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2$ are determinante poziţiile $1,2,\dots,k$.

Reciproc, fie că $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2$ are determinante poziţiile $1,2,\dots,k$. Atunci pentru orice $(w_1^k) \in (Q \times R)^k$ există un singur $w \in (Q \times R)^n$ astfel încât $w \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2$. Deci pentru orice $(x_1^k) \in Q^k$ şi orice $(y_1^k) \in R^k$, există un singur $w \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2$, astfel încât

$$w = (w_1^n) = ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), \dots, (x_n, y_n)),$$

unde

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = h_1(w_1^k) = (f_1(x_1^k), g_1(y_1^k)), \dots, (x_n, y_n) = h_{n-k}(w_1^k) = (f_{n-k}(x_1^k), g_{n-k}(y_1^k)).$$

Prin urmare pentru orice $(x_1^k) \in Q^k$ există un singur cuvânt-cod $u = (x_1^k, f_1(x_1^k), \dots, f_n(x_1^k)) \in \mathbb{C}_1$ şi pentru orice $(y_1^k) \in R^k$ există un singur cuvânt-cod $v = (y_1^k, g_1(y_1^k), \dots, g_n(y_1^k)) \in \mathbb{C}_2$, deci codurile $\mathbb{C}_1$ şi $\mathbb{C}_2$ au determinante poziţiile $1,2,\dots,k$. □

Corolarul 1.1.2. *Fie $\mathbb{C}_1$ un $[n,k]_Q$-cod şi $\mathbb{C}_2$ un $[n,k]_R$-cod. Codul $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2$ atinge marginea superioară Singleton dacă şi numai dacă codurile $\mathbb{C}_1$ şi $\mathbb{C}_2$ ating marginea superioară Singleton.*

Demonstrație. Codurile $\mathbb{C}_1$ şi $\mathbb{C}_2$ ating marginea superioară Singleton dacă şi numai dacă orice k poziţii în cuvintele lor sunt determinante. Însă orice k poziţii ale codurilor $\mathbb{C}_1$ şi $\mathbb{C}_2$ sunt determinante dacă şi numai dacă orice k poziţii ale codului $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2$ sunt determinante. □

Definiția 1.1.7. *Fie (Q,f) şi (R,g) două quasigrupuri k-are. Grupoidul k-ar $(Q \times R, h)$, unde $h((x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k)) = (f(x_1^k), g(y_1^k))$, pentru orice $((x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k)) \in (Q \times R)^k$, se numeşte produsul direct al quasigrupurilor (Q,f) şi (R,g). În acest caz notăm $h = f \times g$.*

Propoziția 1.1.9. *Dacă (Q,f) şi (R,g) sunt quasigrupuri k-are, atunci produsul lor direct $(Q \times R, h)$ este un quasigrup k-ar.*

Într-adevăr, au loc echivalențele:

$$h((a_1,b_1),\dots,(a_{i-1},b_{i-1}),(x_i,y_i),(a_{i+1},b_{i+1}),\dots,(a_k,b_k)) = (a_{k+1},b_{k+1}) \Leftrightarrow$$

$$(f(a_1^{i-1},x_i,a_{i+1}^k), g(b_1^{i-1},y_i,b_{i+1}^k)) = (a_{k+1},b_{k+1}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(a_1^{i-1}, x_i, a_{i+1}^k) = a_{k+1}, \\ g(b_1^{i-1}, y_i, b_{i+1}^k) = b_{k+1}. \end{cases}$$

Deoarece (Q, f) şi (R, g) sunt quasigrupuri k-are, există un singur $(x_i, y_i) \in Q \times R$, pentru orice $i = \overline{1, k}$. □

Propoziția 1.1.10. *Fie (Q, f) şi (R, g) două quasigrupuri k-are şi fie $h = f \times g$ – produsul lor direct. Atunci $h^{(r)} = f^{(r)} \times g^{(r)}, \forall r \in \mathbb{N}$.*

Demonstrație. Aplicăm metoda inducției matematice. Fie $w_1, \dots, w_k \in Q \times R, w_i = (x_i, y_i), i = \overline{1, k}$. Atunci

$$h^{(0)}(w_1^k) = h(w_1^k) = (f(x_1^k), g(y_1^k));$$

$$h^{(1)}(w_1^k) = h(w_2^k, h^{(0)}(w_1^k)) = h((x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k), (f(x_1^k), g(y_1^k))) =$$

$$= (f(x_2^k, f(x_1^k)), g(y_2^k, g(y_1^k))) = (f^{(1)}(x_1^k), g^{(1)}(y_1^k)) \Rightarrow h^{(1)} = f^{(1)} \times g^{(1)}.$$

Presupunem că $h^{(0)} = f^{(0)} \times g^{(0)}, \dots, h^{(r-1)} = f^{(r-1)} \times g^{(r-1)}$, atunci:

$$h^{(r)}(w_1^k) = h(w_{r+1}^k, h^{(0)}(w_1^k), \dots, h^{(r-1)}(w_1^k)) =$$

$$= h((x_{r+1}, y_{r+1}), \dots, (x_k, y_k), (f^{(0)}(x_1^k), g^{(0)}(y_1^k)), \dots, (f^{(r-1)}(x_1^k), g^{(r-1)}(y_1^k)))$$

$$= (f(x_{r+1}^k, f^{(0)}(x_1^k), \dots, f^{(r-1)}(x_1^k)), g(y_{r+1}^k, g^{(0)}(y_1^k), \dots, g^{(r-1)}(y_1^k))) =$$

$$= (f^{(r)}(x_1^k), g^{(r)}(y_1^k)) \Rightarrow h^{(r)} = f^{(r)} \times g^{(r)}. \ \square$$

Propoziția 1.1.11. [38] *Fie $\mathbb{C}(n; f)$ un $[n, k]_Q$-cod şi $\mathbb{C}(n; g)$ un $[n, k]_R$-cod. Dacă $\mathbb{C}(n; f)$ şi $\mathbb{C}(n; g)$ sunt coduri complete k-recursive, atunci $\mathbb{C}(n; f \times g) = \mathbb{C}(n; f) \times \mathbb{C}(n; g)$ este un cod complet k-recursiv.*

Demonstrație. Fie $\mathbb{C}(n; f)$ şi $\mathbb{C}(n; g)$ coduri complete k-recursive. Atunci:

$$\mathbb{C}(n; f) = \{u \in Q^n | u = (x_1^k, f^{(0)}(x_1^k), \dots, f^{(n-k-1)}(x_1^k))\}$$

şi

$$\mathbb{C}(n; g) = \{v \in R^n | v = (y_1^k, g^{(0)}(x_1^k), \dots, g^{(n-k-1)}(y_1^k))\}.$$

Astfel,

$$\mathbb{C}(n; f) \times \mathbb{C}(n; g) = \{w \in (Q \times R)^n | w =$$

$$= ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k), (f^{(0)}(x_1^k), g^{(0)}(y_1^k)), \dots, (f^{(n-k-1)}(x_1^k), g^{(n-k-1)}(y_1^k)))\} =$$

$$= \{w \in (Q \times R)^n | w = (w_1, \ldots, w_k, h^{(0)}(w_1^k), \ldots, h^{(n-k-1)}(w_1^k))\},$$

unde $w_i = (x_i, y_i), i = \overline{1,k}, h^{(0)} = f^{(0)} \times g^{(0)}; \ldots; h^{(n-k-1)} = f^{(n-k-1)} \times g^{(n-k-1)}$. Prin urmare $\mathbb{C}(n; f) \times \mathbb{C}(n; g) = \mathbb{C}(n; f \times g)$ este un cod complet k-recursiv. □

Fie (Q, A) și (Q, B) doi grupoizi. Atunci funcția $\theta: Q^2 \mapsto Q^2, \theta = (A, B)$ este bijectivă dacă și numai dacă $A \perp B$. Un grupoid (Q, f) este un quasigrup dacă și numai dacă $f \perp E$ și $f \perp F$, unde E și F sunt selectorii binari: $E(x, y) = y, F(x, y) = x, \forall x, y \in Q$, deci dacă și numai dacă sunt bijective funcțiile:

$$\theta: Q^2 \mapsto Q^2, \theta(x, y) = (E(x, y), f(x, y)),$$

$$\sigma: Q^2 \mapsto Q^2, \sigma(x, y) = (E(x, y), f(x, y)).$$

Propoziția 1.1.12. [69] *Dacă (Q, f) este un grupoid binar atunci $f^{(k)} = f\theta^k, \forall k \in \mathbb{N}$, unde $\theta: Q^2 \mapsto Q^2, \theta(x, y) = (y, f(x, y))$.*

Observăm că $\theta^2 = (E, f)(E, f) = (f, f\theta)$ și

$$f^{(k)}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \ dacă \ k = 0 \\ f(y, f(x, y)), \ dacă \ k = 1 \\ f(f^{k-2}(x, y), f^{k-1}(x, y)), \ dacă \ k > 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow$$

$$f^{(k)}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \qquad dacă \ k = 0 \\ f(E, f)(x, y), \qquad dacă \ k = 1. \\ f((f^{k-4}(x, y), f^{k-3}(x, y)), (f^{k-3}(x, y), f^{k-2}(x, y))) \ dacă \ k > 1 \end{cases}$$

Astfel obținem:

$$f^{(k)}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \ dacă \ k = 0 \\ f\theta(x, y), \ dacă \ k = 1 \\ f\theta^k(x, y), \ dacă \ k > 1 \end{cases}$$

Prin urmare, $f^{(1)} = f\theta, f^{(2)} = f\theta^2, \ldots, f^{(k)} = f\theta^k$. □

Fie acum $\sum = \{A_1, \ldots, A_t\}$ un sistem ortogonal de operații (OSO). Atunci $\sum \theta$, unde $\sum \theta = \{A_1\theta, \ldots, A_t\theta\}$ este ortogonal pentru orice funcție bijectivă $\theta: Q^2 \mapsto Q^2$.

Propoziția 1.1.13. [69] *Fie (Q, f) un quasigrup binar. Pentru orice $i \in \mathbb{N}$, sistemul $\{f^{(i)}, f^{(i+1)}, f^{(i+2)}\}$ este ortogonal.*

Această afirmație rezultă din faptul că $A \perp B$ dacă și numai dacă este bijectivă funcția $\theta = (A, B)$, unde

$$\theta\colon Q^2 \mapsto Q^2, \theta(x,y) = (A(x,y), B(x,y)).$$

Notând $\theta = (f, E)$, avem:

$$(f^{(i)}, f^{(i+1)}) = (f\theta^i, f\theta^{i+1}) = (f, f\theta)\theta^i = \theta^2\theta^i = \theta^{i+2}$$

deci $(f^{(i)}, f^{(i+1)})$ este bijectivă, de unde rezultă că şi

$$\theta(f^{(i)}, f^{(i+1)}) = \theta\theta^{i+2} = \theta^{i+3}$$

este bijectivă. Deci $f^{(i)} \perp f^{(i+1)}$. De asemenea,

$$(f^{(i+1)}, f^{(i+2)}) = (f\theta^{i+1}, f\theta^{i+2}) = (f, f\theta)\theta^{i+1} = \theta^2\theta^{i+1} = \theta^{i+3}$$

este bijectivă, deci şi

$$\theta(f^{(i+1)}, f^{(i+2)}) = \theta\theta^{i+3} = \theta^{i+4}$$

este bijectivă. Prin urmare, $f^{(i+1)} \perp f^{(i+2)}$. Astfel obținem

$$(f^{(i)}, f^{(i+2)}) = (f\theta^i, f\theta^{i+2}) = (f, f\theta^2)\theta^i = (f, f^{(2)})\theta^i$$

$$\theta(f^{(i)}, f^{(i+2)}) = \theta(f, f^{(2)})\theta^i.$$

Deoarece $\theta, \theta^i, (f, f^{(2)})$ sunt bijective, rezultă că $f^{(i)} \perp f^{(i+2)}$.

Lema 1.1.1. [87] *Fie* $(Q,\cdot)$ *un grupoid. Atunci, pentru orice* $j = \overline{1, n-1}, n \geq 2$*, are loc egalitatea:*

$$x \overset{n}{\cdot} y = (x \overset{j-1}{\cdot} y) \overset{n-(j+1)}{\cdot} (x \overset{j}{\cdot} y).$$

Demonstrație. Vom demonstra prin metoda inducţiei după n. Pentru $n = 2$ şi $j = 1$ obţinem: $x \overset{2}{\cdot} y = (x \overset{0}{\cdot} y) \overset{0}{\cdot} (x \overset{1}{\cdot} y)$, deci afirmația este adevărată.

Pentru $n = 3$ și $j = 1$ obţinem:

$$x \overset{3}{\cdot} y = (x \overset{1}{\cdot} y) \overset{0}{\cdot} (x \overset{2}{\cdot} y) = (x \overset{1}{\cdot} y) \overset{0}{\cdot} [(x \overset{0}{\cdot} y) \overset{0}{\cdot} (x \overset{1}{\cdot} y)] = (x \overset{0}{\cdot} y) \overset{1}{\cdot} (x \overset{1}{\cdot} y).$$

Pentru $n = 3$ şi $j = 2$ obţinem:

$$x \overset{3}{\cdot} y = (x \overset{1}{\cdot} y) \overset{0}{\cdot} (x \overset{2}{\cdot} y).$$

Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru $n = k$. Atunci pentru $n = k + 1$ avem:

$$x \overset{k+1}{\cdot} y = \left(x \overset{k-1}{\cdot} y\right) \overset{0}{\cdot} \left(x \overset{k}{\cdot} y\right) =$$

$$\left[\left(x \overset{j-1}{\cdot} y\right) \overset{(k-1)-(j+1)}{\cdot} \left(x \overset{j}{\cdot} y\right)\right] \overset{0}{\cdot} \left[\left(x \overset{j-1}{\cdot} y\right) \overset{k-(j+1)}{\cdot} \left(x \overset{j}{\cdot} y\right)\right] =$$

$$= (x \overset{j-1}{\cdot} y) \overset{(k+1)-(j+1)}{\cdot} (x \overset{j}{\cdot} y). \qquad \square$$

Lema 1.1.2. [87] *Fie* $(Q,\cdot)$ *un grupoid și fie* $\overset{i}{\cdot}$ *derivata sa recursivă de ordinul i. Atunci, pentru orice întreg pozitiv* j *are loc egalitatea:*

$$x \overset{j}{\cdot} y = y \overset{j-1}{\cdot} (x \overset{0}{\cdot} y).$$

Demonstrație. Vom demonstra prin metoda inducţiei după j.

Pentru $j = 1$ obţinem:

$$x \overset{1}{\cdot} y = y \overset{0}{\cdot} (x \overset{0}{\cdot} y).$$

Pentru $j = 2$ obţinem:

$$x \overset{2}{\cdot} y = (x \overset{0}{\cdot} y) \overset{0}{\cdot} (x \overset{1}{\cdot} y) = (x \overset{0}{\cdot} y) \overset{0}{\cdot} [y \overset{0}{\cdot} (x \overset{0}{\cdot} y)] = y \overset{1}{\cdot} (x \overset{0}{\cdot} y).$$

Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru $j = k$. Atunci pentru $j = k + 1$ avem:

$$x \overset{k+1}{\cdot} y = (x \overset{k-1}{\cdot} y) \overset{0}{\cdot} (x \overset{k}{\cdot} y) = [y \overset{k-2}{\cdot} (x \overset{0}{\cdot} y)] \overset{0}{\cdot} [y \overset{k-1}{\cdot} (x \overset{0}{\cdot} y)] = y \overset{k}{\cdot} (x \overset{0}{\cdot} y). \square$$

Propoziția 1.1.14. *Fie* (Q,f) *un quasigrup binar finit,* $n \in \mathbb{N}^*$ *și fie că derivata recursivă* $f^{(n)}$ *este o operaţie de quasigrup. Sistemul* $\{f, f^{(1)}, \dots, f^{(n)}\}$ *este ortogonal dacă şi numai dacă* (Q,f) *este recursiv* n*-derivabil.*

Demonstrație. Fie (Q,f) un quasigrup recursiv n-derivabil. Atunci $f^{(i)}$ este operaţie de quasigrup pentru $\forall i = \overline{0,n}$. Notăm $f = " \cdot "$ şi $f^{(i)} = \overset{i}{\cdot}$, pentru orice $\forall i = \overline{0,n}$. Deci trebuie să demonstrăm ortogonalitatea sistemului $\{\overset{0}{\cdot}, \overset{1}{\cdot}, \dots, \overset{n}{\cdot}\}$. Vom aplica metoda inducţiei matematice după n. Pentru $n = 1$ avem sistemul $\{\overset{0}{\cdot}, \overset{1}{\cdot}\}$. Pentru a demonstra ortogonalitatea acestor operaţii, rezolvăm sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a \\ x \overset{1}{\cdot} y = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a \\ y \cdot (x \overset{0}{\cdot} y) = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a \\ y \cdot a = b \end{cases}$$

Deoarece $\overset{0}{\cdot}$ este operaţie de quasigrup, sistemul dat are soluţie unică pentru $\forall x, y \in Q$. Prin urmare $\overset{0}{\cdot} \perp \overset{1}{\cdot}$. Pentru $n = 2$ avem sistemul $\{\overset{0}{\cdot}, \overset{1}{\cdot}, \overset{2}{\cdot}\}$. Ortogonalitatea operaţiilor $\overset{0}{\cdot}$ şi $\overset{1}{\cdot}$ am demonstrat-o anterior, ne rămâne să arătăm că $\overset{0}{\cdot} \perp \overset{2}{\cdot}$ şi $\overset{1}{\cdot} \perp \overset{2}{\cdot}$. Observăm că:

$$\begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a \\ x \overset{2}{\cdot} y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a \\ (x \overset{0}{\cdot} y) \cdot (x \overset{1}{\cdot} y) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a \\ (x \overset{0}{\cdot} y) \cdot (y \cdot (x \overset{0}{\cdot} y)) = b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a \\ a \cdot (y \cdot a) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a, \\ y \overset{1}{\cdot} a = b. \end{cases}$$

Deoarece $\overset{1}{\cdot}$ şi $\overset{0}{\cdot}$ sunt operaţii de quasigrup, sistemul obţinut are soluţie unică pentru $\forall x, y \in Q$. Prin urmare $\overset{0}{\cdot} \perp \overset{2}{\cdot}$. Să verificăm ortogonalitatea operaţiilor $\overset{1}{\cdot}$ şi $\overset{2}{\cdot}$:

$$\begin{cases} x \overset{1}{\cdot} y = a \\ x \overset{2}{\cdot} y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{1}{\cdot} y = a \\ (x \overset{0}{\cdot} y) \cdot (x \overset{1}{\cdot} y) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{1}{\cdot} y = a, \\ x \overset{0}{\cdot} y = b/a. \end{cases}$$

Deoarece $\overset{1}{\cdot}$ şi $\overset{0}{\cdot}$ sunt operaţii ortogonale, sistemul obţinut are soluţie unică pentru $\forall x, y \in Q$. Prin urmare $\overset{1}{\cdot} \perp \overset{2}{\cdot}$.

Fie $n = 3$. În acest caz obţinem sistemul: $\{\overset{0}{\cdot}, \overset{1}{\cdot}, \overset{2}{\cdot}, \overset{3}{\cdot}\}$. Ortogonalitatea sistemului $\{\overset{0}{\cdot}, \overset{1}{\cdot}, \overset{2}{\cdot}\}$ am demonstrat-o mai sus, ne rămâne să arătăm că $\overset{0}{\cdot} \perp \overset{3}{\cdot}, \overset{1}{\cdot} \perp \overset{3}{\cdot}$ şi $\overset{2}{\cdot} \perp \overset{3}{\cdot}$. Pentru a demonstra ortogonalitatea operaţiilor $\overset{0}{\cdot} \perp \overset{3}{\cdot}$, rezolvăm sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a \\ x \overset{3}{\cdot} y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a \\ (x \overset{1}{\cdot} y) \cdot (x \overset{2}{\cdot} y) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a \\ (y \cdot a) \cdot (a \cdot ya) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{0}{\cdot} y = a, \\ y \overset{2}{\cdot} a = b. \end{cases}$$

Deoarece $\overset{2}{\cdot}$ şi $\overset{0}{\cdot}$ sunt operaţii de quasigrup, sistemul iniţial are soluţie unică pentru $\forall x, y \in Q$. Prin urmare $\overset{0}{\cdot} \perp \overset{3}{\cdot}$. Să verificăm ortogonalitatea operaţiilor $\overset{1}{\cdot} \perp \overset{3}{\cdot}$:

$$\begin{cases} x \overset{1}{\cdot} y = a \\ x \overset{3}{\cdot} y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{1}{\cdot} y = a \\ (x \overset{1}{\cdot} y) \cdot (x \overset{2}{\cdot} y) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{1}{\cdot} y = a, \\ x \overset{2}{\cdot} y = \mathrm{a} \backslash b. \end{cases}$$

Așa cum $\overset{0}{\cdot}, \overset{1}{\cdot}$ şi $\overset{2}{\cdot}$ sunt operaţii de quasigrup, şi $\overset{1}{\cdot} \perp \overset{2}{\cdot}$, sistemul are soluţie unică pentru $\forall x, y \in Q$. Prin urmare $\overset{1}{\cdot} \perp \overset{3}{\cdot}$. Verificăm ortogonalitatea operaţiilor $\overset{2}{\cdot}$ şi $\overset{3}{\cdot}$:

$$\begin{cases} x \overset{2}{\cdot} y = a \\ x \overset{3}{\cdot} y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \overset{2}{\cdot} y = a, \\ x \overset{1}{\cdot} y = b/a. \end{cases}$$

Dar $\overset{1}{\cdot}$ şi $\overset{2}{\cdot}$ sunt operaţii ortogonale de quasigrup, deci sistemul dat are soluţie unică, pentru $\forall x, y \in Q$. Prin urmare $\overset{2}{\cdot} \perp \overset{3}{\cdot}$.

Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru $n = k$. Atunci este ortogonal sistemul de quasigrupuri $\{\overset{0}{\cdot},\overset{1}{\cdot},\ldots,\overset{k}{\cdot}\}$. Din ortogonalitatea acestui sistem rezultă că sistemele de ecuaţii:

$$\begin{cases} x\overset{i}{\cdot}y = a \\ x\overset{j}{\cdot}y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\overset{i}{\cdot}y = a, \\ (x\overset{i-1}{\cdot}y)\overset{j-(i+1)}{\cdot}a = b, \end{cases}$$

au câte o singură soluţie pentru $\forall 0 < i < j \leq k$. Iar pentru $i = 0$ sistemul:

$$\begin{cases} x\overset{0}{\cdot}y = a \\ x\overset{j}{\cdot}y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\overset{0}{\cdot}y = a, \\ y\overset{j-1}{\cdot}a = b. \end{cases}$$

are soluţie unică, pentru $\forall x, y \in Q$ şi $0 < j \leq k$ (deoarece $\overset{0}{\cdot}$ şi $\overset{j-1}{\cdot}$ sunt operaţii ortogonale de quasigrup).

Demonstrăm acum afirmaţia pentru $n = k + 1$, deci vom demonstra că dacă (Q, f) este recursiv $(k + 1)$ - derivabil, atunci sistemul de derivate recursive $\{\overset{0}{\cdot},\overset{1}{\cdot},\ldots,\overset{k}{\cdot},\overset{k+1}{\cdot}\}$ este ortogonal.

Conform presupunerii inductive sistemul $\{\overset{0}{\cdot},\overset{1}{\cdot},\ldots,\overset{k}{\cdot}\}$ este ortogonal. Ne rămâne să demonstrăm ortogonalitatea operaţiilor $\overset{0}{\cdot}$ cu $\overset{k+1}{\cdot}$ şi $\overset{i}{\cdot}$ cu $\overset{k+1}{\cdot}$, pentru $0 < i \leq k$. Cercetăm următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} x\overset{0}{\cdot}y = a \\ x\overset{k+1}{\cdot}y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\overset{0}{\cdot}y = a \\ (x\overset{k-1}{\cdot}y)\cdot(x\overset{k}{\cdot}y) = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\overset{0}{\cdot}y = a \\ (y\overset{k-2}{\cdot}a)\cdot(y\overset{k-1}{\cdot}a) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\overset{0}{\cdot}y = a, \\ y\overset{k}{\cdot}a = b. \end{cases}$$

Deoarece $\overset{0}{\cdot}$ şi $\overset{k}{\cdot}$ sunt operaţii de quasigrup, sistemul dat are soluţie unică pentru $\forall x, y \in Q$. Prin urmare $\overset{0}{\cdot}\perp\overset{k+1}{\cdot}$. Utilizând Lema 1.1.1, pentru $0 < i \leq k$ obţinem:

$$\begin{cases} x\overset{i}{\cdot}y = a \\ x\overset{k+1}{\cdot}y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\overset{i}{\cdot}y = a \\ (y\overset{k-1}{\cdot}x)\cdot(y\overset{k}{\cdot}x) = b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\overset{i}{\cdot}y = a \\ ((x\overset{i-1}{\cdot}y)\overset{k-1-(i+1)}{\cdot}a)\cdot((x\overset{i-1}{\cdot}y)\overset{k-(i+1)}{\cdot}a) = b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\overset{i}{\cdot}y = a, \\ (x\overset{i-1}{\cdot}y)\overset{k-i}{\cdot}a = \mathrm{b}. \end{cases}$$

Deoarece $\overset{i}{\cdot}$, $\overset{i-1}{\cdot}$ şi $\overset{k-\mathrm{i}}{\cdot}$ sunt operaţii ortogonale (două câte două) de quasigrup, pentru $0 < i \leq k$, sistemul dat are soluţie unică, pentru $\forall a, b \in Q$. Prin urmare, $\overset{i}{\cdot} \perp \overset{k+1}{\cdot}$. Deci sistemul

$$\{\overset{0}{\cdot}, \quad \overset{1}{\cdot}, \quad \cdots \quad , \quad \overset{k}{\cdot}, \quad \overset{k+1}{\cdot}\}$$

este ortogonal. Astfel am arătat că dacă (Q, f) este quasigrup recursiv n- derivabil, atunci sistemul de derivate recursive $\{f, f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\}$ este ortogonal.

Reciproc, fie (Q, f) un quasigrup, $f^{(n)}$ o operaţie de quasigrup şi fie ca sistemul $\{f, f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\}$ este ortogonal. Să arătăm că $f^{(i)}$ este operaţie de quasigrup, pentru $0 < i < n$, adică:

$$\begin{cases} f^{(i)} \perp E, \\ f^{(i)} \perp F. \end{cases}$$

pentru orice i, unde $0 < i < n$. Pentru aceasta trebuie să demonstrăm că funcţiile $(f^{(i)}, E): Q^2 \mapsto Q^2$ şi $(f^{(i)}, F): Q^2 \mapsto Q^2$ sunt bijective, unde

$$(f^{(i)}, E)(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (f^{(i)}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{y}) \text{ şi } (f^{(i)}, F)(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (f^{(i)}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{x}),$$

pentru orice $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in Q^2$. Observăm că, luând $\theta = (E, f)$, au loc egalităţile:

$$(f^{(i)}, E)\theta = (f^{(i)}, E)(E, f) = (f^{(i+1)}, f).$$

Dar funcţiile $(f^{(i+1)}, f)$ şi θ sunt bijective, prin urmare şi $(f^{(i)}, E)$ este bijectivă pentru $\forall i = \overline{1, n-1}$. Deci $f^{(i)} \perp E$ pentru $\forall i = \overline{1, n-1}$. Pe de altă parte,

$$(f^{(i)}, F)\theta = (f^{(i)}, F)(E, f) = (f^{(i+1)}, E)$$

unde θ şi $(f^{(i+1)}, E)$ sunt bijective, conform relaţiei anterioare. Prin urmare şi $(f^{(i)}, F)$ este bijectivă, pentru $\forall i = \overline{1, n-2}$. Deci $f^{(i)} \perp F$ pentru $\forall i = \overline{1, n-2}$. Rămâne de cercetat cazul $f^{(n-1)} \perp F$. Din egalitatea

$$(f^{(n)}, E) = (f^{(n-1)}, F)\theta,$$

deoarece funcţia θ este bijectivă, obţinem că $(f^{(n-1)}, F)$ este bijectivă dacă şi numai dacă $(f^{(n)}, E)$ este bijectivă. Dar funcţia $(f^{(n)}, E)$ este bijectivă reieşind din condiţia iniţială că $f^{(n)}$ este operaţie de quasigrup. Prin urmare şi $(f^{(n-1)}, F)$ este bijectivă, adică $f^{(n-1)} \perp F$. □

În continuare prezentăm estimări cunoscute ale parametrilor $[n, k, d]_q$-codurilor, în particular ale parametrilor $[n, k, d]_q$-codurilor complete recursive.

Un $[n,k,d]_q$- cod C se numeşte cod liniar (în sens larg) dacă pe mulţimea Q există o operaţie binară +, astfel încât $(Q,+)$ este un grup abelian şi $(Q,+)$ este un subgrup în grupul $(Q^n,+)$.

Un $[n,k,d]_q$- cod k-recursiv (C,f) se numeşte cod idempotent, dacă $f(x,x,\dots,x)=x, \forall x \in Q$, unde f este o funcţie $Q^k \to Q$.

Vom nota:

$n(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod ce atinge marginea superioară Singleton;

$n^r(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod k- recursiv ce atinge marginea superioară Singleton;

$n^{ir}(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod k-recursiv idempotent, ce atinge marginea superioară Singleton;

$l(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod liniar (în sens larg) ce atinge marginea superioară Singleton;

$l^r(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod k- recursiv liniar ce atinge marginea superioară Singleton;

$l^{ir}(k,q)$ – numărul maximal n pentru care există un $[n,k,d]_q$– cod k- recursiv liniar idempotent, ce atinge marginea superioară Singleton.

Sunt cunoscute [1, 38, 39, 93] următoarele estimări ale parametrilor $n(k,q), n^r(k,q)$, $n^{ir}(k,q), l(k,q)$, $l^r(k,q), l^{ir}(k,q)$:

1) $n(2,q)=n^r(2,q)=q+1$, pentru orice q primar impar;

2) $n^r(2,q)\geq 4$, pentru orice $q \notin \{2,6,14,18,26\}$;

3) $l^{ir}(2,q)=\begin{cases} q, dacă\ q\ e\ prim \\ q-1, dacă\ q\ e\ primar\ și\ nu\ e\ prim \end{cases}$;

4) $n(3,q)=q+1$, pentru orice q primar impar;

5) $n(3,2^t)=n(2^t-1,2^t)=2^t+2$, pentru orice $t\geq 2$;

6) $l^r(3,q)=q+1$, pentru orice q primar, $q\neq 4$;

7) $l^r(3,2^t)=2^t+1$, pentru orice $t\geq 3$;

8) $n(3,4) = l^r(3,4) = 6$;

9) $n(k,q) = k + 1$, pentru orice $q \leq k$, orice $k \geq 3$;

10) $n(k,q) \leq q + k - 1$, dacă $3 \leq k < q$;

11) $n(k,q) \geq q + 1$, dacă $3 \leq k < q$, q este primar;

12) $n^r(k,q) \geq q + 1$, pentru orice q primar și orice $k \in \{1, \dots, q\}$;

13) $n^r(2^t - 1, 2^t) = 2^t + 2$, pentru $t = 2,3,4$.

14) $n(k, q_1 q_2) \geq min\{n(k, q_1), n(k, q_2)\}$;

15) $n^r(k, q_1 q_2) \geq min\{n^r(k, q_1), n^r(k, q_2)\}$;

În tabelul următor sunt prezentate marginile de jos ale parametrilor $n^r(2,q)$ (la numărător) și $n(2,q)$ (la numitor). În celula (0,0) sunt dați parametrii $n^r(2,q)$ și $n(2,q)$ pentru $q = 100$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0(100)	$^{5}/_{10}$	$^{\infty}/_{\infty}$	$^{3}/_{3}$	$^{4}/_{4}$	$^{5}/_{5}$	$^{6}/_{6}$	$^{3}/_{3}$	$^{8}/_{8}$	$^{9}/_{9}$	$^{10}/_{10}$
10	$^{4}/_{4}$	$^{12}/_{12}$	$^{14}/_{14}$	$^{4}/_{7}$	$^{?}/_{5}$	$^{4}/_{6}$	$^{17}/_{17}$	$^{18}/_{18}$	$^{?}/_{5}$	$^{20}/_{20}$
20	$^{5}/_{6}$	$^{5}/_{6}$	$^{4}/_{5}$	$^{24}/_{24}$	$^{5}/_{6}$	$^{26}/_{26}$	$^{?}/_{5}$	$^{28}/_{28}$	$^{5}/_{5}$	$^{20}/_{20}$
30	$^{4}/_{5}$	$^{32}/_{32}$	$^{33}/_{33}$	$^{4}/_{6}$	$^{4}/_{5}$	$^{6}/_{6}$	$^{4}/_{5}$	$^{38}/_{38}$	$^{4}/_{5}$	$^{5}/_{6}$
40	$^{4}/_{6}$	$^{42}/_{42}$	$^{4}/_{5}$	$^{44}/_{44}$	$^{5}/_{5}$	$^{4}/_{5}$	$^{4}/_{6}$	$^{48}/_{48}$	$^{4}/_{6}$	$^{50}/_{50}$
50	$^{7}/_{8}$	$^{4}/_{6}$	$^{5}/_{5}$	$^{54}/_{54}$	$^{6}/_{6}$	$^{6}/_{7}$	$^{8}/_{9}$	$^{7}/_{9}$	$^{7}/_{7}$	$^{60}/_{60}$
60	$^{5}/_{6}$	$^{62}/_{62}$	$^{6}/_{6}$	$^{8}/_{8}$	$^{65}/_{65}$	$^{7}/_{9}$	$^{6}/_{7}$	$^{68}/_{68}$	$^{6}/_{7}$	$^{6}/_{8}$
70	$^{7}/_{8}$	$^{72}/_{72}$	$^{9}/_{9}$	$^{74}/_{74}$	$^{6}/_{7}$	$^{6}/_{7}$	$^{6}/_{7}$	$^{8}/_{8}$	$^{7}/_{8}$	$^{80}/_{80}$
80	$^{8}/_{9}$	$^{82}/_{82}$	$^{6}/_{10}$	$^{84}/_{84}$	$^{7}/_{8}$	$^{7}/_{8}$	$^{7}/_{8}$	$^{6}/_{8}$	$^{9}/_{9}$	$^{90}/_{90}$
90	$^{6}/_{6}$	$^{8}/_{8}$	$^{7}/_{7}$	$^{6}/_{6}$	$^{7}/_{7}$	$^{7}/_{7}$	$^{7}/_{7}$	$^{98}/_{98}$	$^{7}/_{7}$	$^{10}/_{10}$

Tabelul 1.1

1.2. Transversale. Quasigrupuri admisibile

Noțiunea de substituție completă a fost introdusă de Mann în lucrarea [91] în legătură cu studiul quasigrupurilor ortogonale.

Definiția 1.2.1. *Quasigrupurile n-are* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *definite pe mulțimea* Q, *se numesc ortogonale dacă, pentru orice* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in Q$, *sistemul de ecuații*

$$\begin{cases} A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 \\ A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_2 \\ \cdots \\ A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_n \end{cases}$$

are soluție unică în Q.

Dacă Q este o mulțime finită, atunci tabla înmulțirii quasigrupului n-ar (Q, A) reprezintă un hipercub latin n-dimensional în celulele căruia sunt elementele mulțimii Q. În acest caz ortogonalitatea sistemului de quasigrupuri n-are $A_1, A_2, \ldots, A_n$ este echivalentă cu faptul că la suprapunerea celor n hipercuburi, uplele de lungime n, formate în celule, nu se vor repeta. În caz binar tablele quasigrupurilor finite reprezintă pătrate latine, iar ortogonalitatea a două quasigrupuri binare, definite pe o mulțime finită Q din q elemente, este echivalentă cu faptul că la suprapunerea celor două pătrate latine de ordinul q, corespunzătoare quasigrupurilor date, se va obține un pătrat greco-latin, adică cele q^2 perechi ordonate sunt distincte 2 câte 2.

Definiția 1.2.2. *Un sistem de quasigrupuri n-are* $A_1, A_2, \ldots, A_s$, *unde* $s \geq n$, *definite pe o mulțime* Q, *se numește sistem ortogonal dacă orice n operații din acest sistem sunt ortogonale.*

În particular un sistem $L_1, L_2, \ldots, L_s$ de pătrate latine, unde $s \geq 2$, se numește sistem ortogonal dacă orice 2 pătrate latine din acest sistem sunt ortogonale. Este cunoscut faptul că dacă $L_1, L_2, \ldots, L_s$ este un sistem ortogonal de pătrate latine definite pe o mulțime din q elemente, atunci $s \leq q - 1$. Însă marginea superioară exactă nu este cunoscută pentru pătratele latine de ordinul q în caz general. De exemplu, se știe că există 2 pătrate latine ortogonale de ordinul 10, dar nu au fost construite sisteme ortogonale de pătrate latine de ordinul 10 formate din 3 sau mai multe pătrate latine până în prezent. Mai jos dăm unele estimări cunoscute [39, 71] ale numărului $N(2, q)$, unde $q \geq 3$:

1. $N(2, q) \geq 2$, dacă și numai dacă $q \notin 2{,}6$;
2. $N(2, q) \geq 3$, dacă $q \notin \{2,3,6,10\}$;
3. $N(2, q) = q - 1$, dacă q este primar;
4. $N(2, q_1 q_2) \geq min\{N(2, q_1), N(2, q_2)\}$;
5. $N(2, q) \geq q^{10/143} - 2$.

Rămâne deschisă problema caracterizării marginii superioare pentru $N(k,q)$ – numărul maximal de hipercuburi latine ortogonale de ordinul k, definite pe o mulțime din q elemente.

De asemenea, se știe că pentru un pătrat latin L_1 de ordinul q există un pătrat latin L_2 de același ordin, ortogonal cu el, dacă și numai dacă L_1 se descompune în q transversale disjuncte două câte două [8, 71, 72].

Definiția 1.2.3. *O transversală a unui pătrat latin de ordinul n este o mulțime de n celule, luate câte una din fiecare linie și câte una din fiecare coloană, astfel încât elementele din aceste celule sunt distincte două câte două.*

Rolul transversalelor în caracterizarea ortogonalității grupurilor finite rezultă din următoarele două afirmații [71]:

1. Dacă un pătrat latin L, dat de tabla Cayley a unui grup finit de ordinul q, posedă o transversală atunci L se descompune în q transversale disjuncte, deci pentru L există un pătrat latin ortogonal cu el.
2. În orice grup finit de ordin impar G funcția $x \to x^2$ este bijectivă, deci în pătratul latin dat de tabla unui grup finit de ordin impar diagonala principală este o transversală.

Din ultima afirmație rezultă că există pătrate latine ortogonale de orice ordin impar $q \geq 3$. Soluționarea completă a impotezei lui Euler în anii 1959-1960 a arătat că există pătrate latine ortogonale de ordinul q pentru orice $q \neq 2,6$.

Definiția 1.2.4. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup. O funcție bijectivă* $\theta: Q \to Q$ *se numește substituție completă a quasigrupului* $(Q,\cdot)$, *dacă funcția* $\theta': Q \to Q, \theta'(x) = x \cdot \theta(x)$ *este bijectivă.*

Relația dintre noțiunile de substituție completă și transversală este caracterizată de următoarea afirmație care rezultă direct din definițiile lor.

Propoziția 1.2.1. [8, 71, 72] *Dacă Q este un quasigrup care posedă o substituție completă, atunci tabla sa Cayley este un pătrat latin cu o transversală. Reciproc, dacă L este un pătrat latin având o transversală, atunci quasigrupul care are L în calitate de tablă Cayley posedă o substituție completă.*

Noțiunea de transversală a fost introdusă pentru prima dată de Euler (1779), care a numit-o ”formule directrix”. Mai târziu, Singer (1960) a utilizat această noțiune, numind-o ”1-permutare”, iar Denes și Pasztor (1963) au numit-o ”diagonală”. Ulterior, Johnson, Dulmage și Mendelsohn (1961), apoi Parker (1963) și alții, au utilizat noțiunea dată cu denumirea de „transversală” [5, 16, 18-19].

Quasigrupurile care posedă substituții complete se numesc *quasigrupuri admisibile*. De exemplu, orice quasigrup idempotent este admisibil, cu substituția completă trivială $\theta = \varepsilon$.

Relația dintre noțiunile de quasigrup admisibil și quasigrup idempotent este dată în următoarea afirmație.

Propoziția 1.2.2. [8, 71, 72] *Un quasigrup* $(Q,\cdot)$ *este admisibil dacă și numai dacă el este izotop unui quasigrup idempotent.*

Într-adevăr, dacă $(Q,\cdot)$ este un quasigrup admisibil cu substituția completă θ, atunci izotopul său $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = (\theta')^{-1}(x \cdot \theta y)$, este idempotent. Reciproc, dacă quasigrupul $(Q,\cdot)$ este izotop unui quasigrup idempotent $(Q,\circ)$ cu izotopia $(\cdot) = (\circ)^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, atunci $\theta = \beta^{-1}\alpha$ este o substituție completă în $(Q,\cdot)$, deci quasigrupul $(Q,\cdot)$ este admisibil.

Drept consecințe imediate din ultima propoziție obținem că orice izotop al unui quasigrup admisibil este de asemenea admisibil și că orice grup finit de ordin impar este izotop unui quasigrup idempotent. Belousov a demonstrat un rezultat analog în cazul parastrofilor unui quasigrup. Însă există quasigrupuri finite care nu sunt admisibile. De exemplu, Mann a demonstrat că dacă un quasigrup Q de ordinul $4k + 2$ are un subquasigrup de ordinul $2k + 1$, atunci tabla Cayley a quasigrupului Q nu posedă transversale. Drept exemplu de astfel de quasigrup servește quasigrupul de ordinul 6 dat de următoarea tablă Cayley:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	5	6	4
3	3	1	2	6	4	5
4	4	5	6	1	2	3
5	6	4	5	2	3	1
6	5	6	4	3	1	2

Ryser (1967) a pus problema existenței quasigrupurilor finite de ordin impar care nu posedă substituții complete [72]. În prezent rămâne deschisă problema caracterizării tuturor quasigrupurilor care posedă substituții complete.

Grupurile finite admisibile furnizează exemple de pătrate latine ce posedă transversale. Se știe că grupurile finite de ordin impar sunt admisibile cu substituția completă $\theta = \varepsilon$, deoarece în astfel de grupuri funcția $x \to x^2$ este bijectivă, deci o transversală a pătratului latin dat de tabla lor multiplicativă (Cayley) este diagonala principală. De asemenea, se știe că dacă pătratul latin de ordinul n, dat de tabla Cayley a unui grup finit, posedă o transversală, atunci el se descompune în n transversale disjuncte. În același timp, există grupuri finite de ordin par care nu sunt admisibile. Un astfel de exemplu este grupul simetric S_3 [8].

Rezultate care țin de studiul admisibilității grupurilor finite au fost obținute de mulți cercetători. La începutul anilor 50 ai sec. xx, Paige [103] a demostrat că un grup finit $(G,\cdot)$ posedă o substituție completă dacă produsul tuturor elementelor sale, luate într-o anumită ordine, este egal cu elementul neutru al lui G [72]. De asemenea Paige a arătat că în cazul grupurilor abeliene această condiție este necesară și suficientă. Ultima afirmație este o consecință din următoarea teoremă:

Teorema 1.2.1. [103] O c*ondiţie suficientă ca un grup finit* $(G,\cdot)$ *de ordinul* n *să posede o substituție completă este să existe un șir de elemente* $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ *din* $G\backslash\{e\}$*, astfel încât produsele parţiale* a_1*,* a_1a_2*,* $a_1a_2a_3$ *,…,* $a_1a_2\dots a_{n-2}$ *să fie distincte două câte două, iar produsul* $a_1a_2\dots a_{n-1}$ *să fie egal cu elementul neutru* e *al grupului* G*.*

Următoarea teoremă a fost demonstrată independent de mai mulți autori, inclusiv de Miller (1903), Paige (1947), Ramanathan (1947) și M. Hall (1952).

Teorema 1.2.2. [71] *Produsul tuturor elementelor unui grup abelian finit* $(G,\cdot)$ *este egal cu elementul neutru* e *al lui* G*, cu excepţia cazului în care* G *conţine exact un element de ordinul doi. În acest caz produsul dat este egal cu elementul unic de ordinul doi.*

Corolarul 1.2.1. *Tabla Cayley a unui grup abelian posedă o transversală, cu excepţia cazului în care acel grup are exact un element de ordinul 2.*

Corolarul de mai sus a fost demonstrat şi de Carlitz (1953). M. Hall și Paige (1955) au demonstrat că tabla Cayley a unui grup rezolubil posedă o transversală dacă și numai dacă 2-subgrupurile Sylow ale acestui grup nu sunt ciclice. M. Hall și Paige au abordat și această problemă în cazul grupurilor finite arbitrare, obținând următorul rezultat:

Propoziția 1.2.3. [71] *Grupurile finite care conțin 2-subgrupuri Sylow ciclice nu posedă substituții complete.*

Din această propoziție rezultă în particular următoarul corolar:

Corolarul 1.2.2. [91] *Grupurile finite de ordinul* $n = 4k + 2$ *nu posedă substituții complete. În particular, grupul simetric* S_3 *nu are substituții complete.*

Hall şi Paige au demonstrat că grupurile alterne A_n de grad n posedă substituții complete şi că grupul simetric S_n, unde $n > 3$, posedă substituții complete. Problema caracterizării complete a grupurilor finite admisibile rămâne deschisă în prezent. Observăm că în cazul grupurilor infinite problema dată este soluționată complet de Bateman (1950) care a demonstrat că toate grupurile infinite posedă substituții complete, deci sunt grupuri admisibile.

1.3. Metode de prelungire a quasigrupurilor finite

În acest paragraf sunt expuse metode cunoscute de prelungire a quasigrupurilor. Prin "prelungire" a unui quasigrup finit înțelegem un proces de extindere a quasigrupului prin adăugarea unuia sau a mai multor elemente noi şi redefinirea operaţiei, pentru a obține un nou quasigrup de ordin mai mare.

Prima construcţie de prelungire a unui quasigrup a fost propusă de către Bruck [23] în 1944, pentru cazul quasigrupurilor idempotente. Cu toate aceastea, termenul "prelungire" a fost introdus de către Belousov [7] în 1967. Construcţii ale unor prelungiri ale quasigrupurilor finite au fost date, de mai mulți cercetători, printre care Osborn (1961), Yamamoto (1961), Denes şi Pasztor (1963), Belousov şi Belyavskaya (1968), Belyavskaya (1969), Deriyenko şi Dudek (2008, 2013) şi alţii [71].

În continuare este explicat modul în care construcția unei prelungiri poate fi realizată în practică. Fie $(Q,\cdot)$ un quasigrup. Presupunem că elementele lui Q sunt $1, 2, \dots, n$, iar L este pătratul latin dat de tabla Cayley a quasigrupului $(Q,\cdot)$. Deoarece $(Q,\cdot)$ posedă o substituție completă, L are cel puțin o transversală. Înlocuim elementele din toate celulele acestei transversale cu un element nou $n + 1$. Notăm cu Q' mulțimea $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$. Fără a le schimba ordinea, transferăm elementele transversalei în linia și, respectiv, coloana elementului $n + 1$. În final, pentru a obține pătratul latin L' dat de tabla prelungirii $(Q',*)$, completăm cu $n + 1$ celula care se află la intersecția liniei și a coloanei elementului $n + 1$.

În continuare vom prezenta metode cunoscute de prelungire a quasigrupurilor finite.

1. Metoda Bruck

Bruck a considerat prelungiri ale quasigrupurilor idempotente, adică quasigrupuri $(Q,\cdot)$ ce verifică identitatea $x \cdot x = x$, pentru orice $x \in Q$.

Conform metodei lui Bruck, prelungirea $(Q',\circ)$ a quasigrupului finit $(Q,\cdot)$, unde $Q = \{1, \dots, q\}$ şi $Q' = Q \cup \{\xi\}, \xi \notin Q$, este quasigrupul cu tabla Cayley:

$\circ$	1	...	q	ξ
1	ξ	...	...	1
...	...	...	...	...
q	...	...	ξ	q
ξ	1	...	q	ξ

Tabelul 1.2

unde $x \circ y = x \cdot y$, pentru orice $x \neq y$ din Q. Ilustrăm metoda de prelungire Bruck prin următorul exemplu.

Fie $(Q,*)$ un quasigrup de ordinul 3, unde $Q = \{1,2,3\}$ şi

$*$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

Adăugăm un nou element, fie acesta 4, la mulțimea Q pentru a obține prelungirea $(Q',\circ)$, unde în cazul dat $Q' = \{1,2,3,4\}$, şi contruim tabla operației $\circ$ conform metodei lui Bruck. Pentru aceasta, adăugăm o coloană suplimentară în dreapta şi o linie suplimentară în partea de jos a tablei Cayley a quasigrupului $(Q,*)$. Fără a le schimba ordinea, transferăm elementele de pe diagonala principală în coloana, şi respectiv linia, elementului 4. Apoi completăm celulele de pe diagonala principală cu elementul 4. Construcția este ilustrată în Figura 1.1

$*$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

$\rightarrow$

	1	2	3	
1		3	2	1
2	3		1	2
3	2	1		3
	1	2	3	

$\rightarrow$

$\circ$	1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	3	4	1	2
3	2	1	4	3
4	1	2	3	4

Figura 1.1

2. Metoda Belousov

V. Belousov a considerat o construcție a prelungirii, utilizând substituţii complete [7]. O substituţie completă a unui quasigrup $(Q,\cdot)$ este o bijecţie $\theta: Q \mapsto Q$, astfel încât funcția $\theta': Q \mapsto Q$, unde $\theta'(x) = x \cdot \theta(x)$, este de asemenea bijectivă. În caz finit, substituţiile complete ale quasigrupurilor definesc transversale ale tablelor Cayley respective.

Conform metodei lui Belousov, prelungirea $(Q',\circ)$ a quasigrupului finit $(Q,\cdot)$, unde $Q = \{1, \dots, q\}$ și $Q' = Q \cup \{\xi\}, \xi \notin Q$, este quasigrupul cu tabla Cayley:

$\circ$	...	$\theta(x)$	...	ξ
...	...	...	...	...
x	...	ξ	...	$\theta'(x)$
...	...	...	...	...
ξ	...	$\theta'(x)$	...	ξ

Tabelul 1.3

unde $x \circ y = x \cdot y$, pentru orice $y \neq \theta(x)$ din Q.

Ilustrăm metoda dată de V. Belousov cu ajutorul următorului exemplu. Fie $(Q,\cdot)$ un quasigrup de ordinul 3, unde $Q = \{1,2,3\}$ și operația " $\cdot$ " este dată de tabla

$\cdot$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Tabelul 1.4

În pătratul latin dat de tabla quasigrupului $(Q,\cdot)$, fixăm transversala $T = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$. Construim prelungirea $(Q',\circ)$ adăugând un nou element la mulțimea Q. Pentru aceasta, luăm, de exemplu, $Q' = \{1,2,3,4\}$, și definim operația $(\circ)$ în felul următor:

1) adăugăm câte o linie și o coloană nouă în partea de jos și în dreapta, respectiv;

2) transferăm în celulele liniei noi și a coloanei noi elementele din celulele transversalei T, aducând în celula $(4, i)$ a liniei noi elementul din coloana i, iar in celula $(i, 4)$ – elementul din linia i, unde $i = 1,2,3$;

3) completăm toate celulele rămase goale cu elementul nou „4”.

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

→

	1	2	3	
1	1	2		3
2		3	1	2
3	3	1	2	1
	2	1	3	

→

∘	1	2	3	4
1	1	2	4	3
2	4	3	1	2
3	3	4	2	1
4	2	1	3	4

Figura 1.2

În acest mod putem utiliza orice transversală a pătratului latin inițial.

Construcția ilustrată în exemplul precedent poate fi generalizată în cazul pătratelor latine de ordinul n, utilizând de la două până la n transversale disjuncte. Prezentăm generalizări ale metodei date de construcţie în exemplele 1.3.1 -1.3.2.

Fie $(Q,\cdot)$ quasigrupul de ordinul 3, dat în Tabelul 1.4, unde $Q = \{1,2,3\}$**.** Observăm că pătratul latin dat de tabla acestui quasigrup posedă trei transversale disjuncte:

$$T_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\},\ \ T_2 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\},\ \ T_3 = \{(1,3),(2,1),(3,2)\},$$

evidențiate cu culori diferite în tabelul următor

$(\cdot)$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Vom prelungi acest quasigrup prin adjuncția a două şi, respectiv trei, elemente noi.

Exemplul 1.3.1 (Prelungirea unui quasigrup prin utilizarea a două transversale disjuncte)

Utilizând transversalele T_1 şi T_2, prelungim pătratul latin, dat în Tabelul 1.4, la un pătrat latin de ordinul 5, urmând paşii următori.

1. Adăugăm două coloane suplimentare din dreapta şi două linii suplimentare în partea de jos. Fără a le schimba ordinea, transferăm elementele din celulele transversalei T_1, respectiv ale transversalei T_2, în celule primei, respectiv celei de-a doua linii (coloane). Obținem astfel:

	1	2	3		
1			3	1	2
2	2			3	1
3		1		2	3
	1	3	2		
	3	2	1		

Observăm că putem adăuga cele două coloane, respectiv linii, în orice loc potrivit al pătratului latin dat.

2. Completăm toate celulele rămase goale ale primei transversale cu elementul nou 4, iar cele ale transversalei T_2 - cu elementul nou 5:

	1	2	3	4	5
1	4	5	3	1	2
2	2	4	5	3	1
3	5	1	4	2	3
4	1	3	2		
5	3	2	1		

3. În pătratul rămas gol, din dreapta jos, completăm celulele astfel, încât să obținem un quasigrup de ordinul 2, definit pe mulțimea $\{4,5\}$. Obținem în rezultat un quasigrup de ordinul 5, de exemplu, cel dat în Tabelul 1.5.

$\circ$	1	2	3	4	5
1	4	5	3	1	2
2	2	4	5	3	1
3	5	1	4	2	3
4	1	3	2	5	4
5	3	2	1	4	5

Tabelul 1.5

Observăm că putem modifica această construcție, schimbând ordinea liniilor şi/sau a coloanelor adăugate, de exemplu în felul următor:

$\circ$	1	2	3	4	5
1	4	5	3	1	2
2	2	4	5	3	1
3	5	1	4	2	3
4	3	2	1	5	4
5	1	3	2	4	5

De asemenea, în procesul prelungirii pătratelor latine (quasigrupurilor) putem plasa coloane şi linii suplimentare nu doar în dreapta şi în partea de jos a pătratului latin iniţial, ci în orice alt loc potrivit.

Exemplul 1.3.2 (Prelungirea unui quasigrup finit prin utilizarea a trei transversale disjuncte)

Vom prelungi pătratul latin de ordinul 3, dat în Tabelul 1.4, la un pătrat latin de ordinul 6, efectuând paşii prezentaţi mai jos.

1. Adăugăm 3 coloane suplimentare în dreapta şi trei linii suplimentare în partea de jos a Tabelului 1.4. Fără a schimba ordinea, transferăm elementele din celulele transversalelor T_1, T_2 şi T_3, respectiv, în celulele liniilor noi și în cele ale coloanelor noi, obținând astfel:

	1	2	3			
1				1	2	3
2				3	1	2
3				2	3	1
	1	3	2			
	3	2	1			
	2	1	3			

2. Completăm toate celulele rămase goale ale transversalor: $T_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, $T_2 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, $T_3 = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$ cu elementele 4, 5, 6, respectiv:

	1	2	3	4	5	6
1	4	5	6	1	2	3
2	6	4	5	3	1	2
3	5	6	4	2	3	1
4	1	3	2	□	□	□
5	3	2	1	□	□	□
6	2	1	3	□	□	□

3. În pătratul rămas gol, în partea dreaptă jos, punem orice quasigrup de ordinul 3, definit pe mulţimea $\{4,5,6\}$. Obținem astfel un pătrat latin de ordinul 6, de exemplu,

$\circ$	1	2	3	4	5	6
1	4	5	6	1	2	3
2	6	4	5	3	1	2
3	5	6	4	2	3	1
4	1	3	2	4	5	6
5	3	2	1	5	6	4
6	2	1	3	6	4	5

Tabelul 1.6

Metoda propusă de G. Belyavskaya

G.B. Belyavskaya a propus o modificare a construcţiei Bruck-Belousov. Această metodă constă în următoarele: adăugăm o coloană suplimentară în dreapta şi o linie suplimentară în partea de jos a tablei Cayley a quasigrupului, apoi transferăm în celulele liniei noi şi, respectiv, a coloanei noi, toate elementele transversalei fixate (colorate), cu excepţia unui singur element (în exemplul nostru - elementul “2”), păstrând ordinea lor din transversală. Completăm apoi toate celulele rămase goale ale transversalei, cu excepţia celei din care nu am transferat elementul, cu simbolul nou (în Figura 1.3 - cu "4"). Celula cu coordonatele $(n+1, n+1)$ este completată cu elementul netransferat al transversalei.

Ilustrăm această metodă prin exemplul următor:

·	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

→

	1	2	3	□
1	1	2	□	3
2	2	3	1	□
3	3	□	2	1
□	□	1	3	□

→

∘	1	2	3	4
1	1	2	4	3
2	2	3	1	4
3	3	4	2	1
4	4	1	3	2

Figura 1.3

O generalizare a metodei propuse de G. Belyavskaya

Construcţia dată de Belyavskaya poate fi generalizată utilizând un set de transversale disjuncte (atunci când acestea există). Ilustrăm metoda dată pe următorul exemplu.

a) Prelungim pătratul latin de ordinul 3, dat în Tabelul 1.4, până la un pătrat latin de ordinul 5, utilizând construcţia dată de Belyavskaya, care se aplică simultan la două transversale. Pentru aceasta adăugăm două coloane suplimentare în dreapta şi două linii suplimentare în partea de jos a Tabelului 1.4, apoi efectuăm următorii pași.

1. Fără a le schimba ordinea, transferăm elementele din cele două transvesale, cu excepția a câte unui element din fiecare transversală, respectiv, în liniile și în coloanele adăugate. Fixăm, de exemplu, elementul 1 în transversala T_1 (marcată în roșu) și tot elementul 1 în transversala T_2 (marcată în galben). Nu este obligatoriu ca în transversalele utilizate să luăm același element. Obținem astfel tabelul

	1	2	3	□	□
1	1	□	3	□	2
2	2	□	1	3	□
3	□	1	□	2	3
□	□	3	2	□	□
□	3	2	□	□	□

2. Completăm toate celulele din transversalele T_1 și T_2, rămase goale după transferul elementelor, cu elementele noi 4 și 5, respectiv. Celula de la intersecția liniei, și respectiv coloanei,

elementului fixat în T_1 și coloana, respectiv linia primului element nou, se va completa cu elementul 4, iar celula de la intersecția liniei, și respectiv coloanei, elementului fixat în T_2 și coloana, respectiv linia celui de-al doilea element nou, se va completa cu elementul 5.

	1	2	3	4	5
1	1	5	3	4	2
2	2	4	1	3	5
3	5	1	4	2	3
4	4	3	2	$\square$	$\square$
5	3	2	5	$\square$	$\square$

3. Pentru completarea pătratului rămas gol în dreapta jos, putem utiliza elementul fixat în transversale 1 și elementele noi 4 și, respectiv 5. Obținem astfel prelungirea dată în Tabelul 1.7.

$\circ$	1	2	3	4	5
1	1	5	3	4	2
2	2	4	1	3	5
3	5	1	4	2	3
4	4	3	2	5	1
5	3	2	5	1	4

Tabelul 1.7

b) Utilizând construcția generalizată propusă de Belyavskaya, prelungim pătratul latin dat în Tabelul 1.4 la un pătrat latin de ordinul 6 urmând pașii dați mai jos.

1. Adăugăm 3 elemente noi 4, 5 și 6, la mulțimea Q și, de asemenea, 3 coloane suplimentare în dreapta și 3 linii suplimentare în partea de jos a Tabelul 1.4. Fără a schimba ordinea elementelor, transferăm elementele transversalelor T_1, T_2 și T_3, cu excepția a câte unui singur element din fiecare transversală, respectiv, în celulele celor trei linii și celor trei coloane noi adăugate.

Fixăm, de exemplu, elementul 3 în transversalele T_1 și T_2 și elementul 1 în transversala T_3. Obținem tabelul

	1	2	3	4	5	6
1				1	2	3
2		3			1	2
3	3	1		2		
4	1		2			
5		2	1			
6	2		3			

2. Completăm toate celulele din transversalele T_1, T_2 și T_3, rămase goale după transferul elementelor, cu elementele noi 4, 5 și 6, respectiv. Celula de la intersecția liniei, și respectiv coloanei, elementului fixat în T_1(respectiv T_2, T_3) și coloana, respectiv linia primului element nou (al doilea, al treilea element nou), se va completa cu elementul 4 (respectiv 5,6).

	1	2	3	4	5	6
1	4	5	6	1	2	3
2	6	3	5	4	1	2
3	3	1	4	2	5	6
4	1	4	2			
5	5	2	1			
6	2	6	3			

3. Pătratul gol, rămas în dreapta jos, se completează cu elemente potrivite (dintre elementele 1,2,3,4,5,6) pentru a obţine un quasigrup. Obținem astfel, de exemplu, Tabelul 1.8.

∘	1	2	3	4	5	6
1	4	5	6	1	2	3
2	6	3	5	4	1	2
3	3	1	4	2	5	6
4	1	4	2	3	6	5
5	5	2	1	6	3	4
6	2	6	3	5	4	1

Tabelul 1.8

Metoda Dudek-Derienko

W. A. Dudek şi I. I. Derienko au propus o construcţie de prelungire a unui quasigrup finit, utilizând în acest scop substituţii quasicomplete. Această construcţie prezintă o generalizare a construcţiei date de Belyavskaya.

Fie că $(Q,\cdot)$ este un quasigrup finit şi fie $\sigma: Q \to Q$ o funcţie. Putem construi funcţia $\overline{\sigma}: Q \to Q$, în felul următor: $\overline{\sigma}x = x \cdot \sigma x, \forall x \in Q$. Funcția σ se numește substituție *quasicompletă* dacă σ este o permutare a mulţimii Q şi $\overline{\sigma}(Q)$ conţine toate elementele lui Q cu excepţia unuia. În acest caz există un element $a \in Q$, numit *special*, astfel încât $a = \overline{\sigma}x_1 = \overline{\sigma}x_2$ pentru careva $x_1, x_2 \in Q, x_1 \neq x_2$.

În continuare prezentăm construcţia propusă de W. Dudek și I. Derienko. Să presupunem că pătratul latin L de ordinul n are o transversală parţială P de lungime $n-1$. Atunci celulele lui P apar în $n-1$ linii şi $n-1$ coloane din L şi sunt toate distincte. Fie u elementul care lipseşte din P şi fie v elementul din celula (R, C), unde R şi C sunt, respectiv, linia şi coloana pătratului latin L care nu conţin niciun element din P.

Fie că în celula (R, C) se află elementul v. Adăugăm o linie nouă a $(n+1)$-a şi o coloană nouă a $(n+1)$-a la pătratul latin L și un element nou w la cele *n* elemente ale pătratului latin L. Fără a le schimba ordinea, transferăm elementele transversalei parțiale P în linia a $(n+1)$-a şi respectiv în coloana a $(n+1)$-a a lui L. În linia r_i, a coloanei noi, scriem elementul care era în linia r_i a transversalei parțiale P, pentru fiecare r_i, cu excepția $r_i = R$. În linia R a coloanei noi punem elementul nou w, iar în linia a $n+1$-a a coloanei noi punem u. În coloana c_i a liniei a $(n+1)$-a scriem elementul care era în coloana c_i a lui P, pentru fiecare c_i cu excepția $c_i = C$. În coloana C a liniei noi punem elementul w. În final oservăm că deja am pus u în coloana $n+1$ a liniei noi. Completăm elementele din celulele rămase goale ale transversalei parțiale P cu un element nou w.

Ilustrăm construcţia propusă de Dudek-Derienko printr-un exemplu. Pornim de la un quasigrup şi o substitutie quasicompletă, acţionăm ca în construcţia Belyavskaya, dar în celula cu coordonatele $(n+1, n+1)$ scriem elementul $Q \backslash \overline{\sigma}Q$ (elementul special).

Exemplul 1.3.3. Fie dat quasigrupul de ordinul 4:

$\cdot$	1	2	3	4
1	2	1	3	4
2	3	2	4	1
3	4	3	1	2
4	1	4	2	3

şi următoarea funcţie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\overline{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

deci σ este o substituție quasicompletă şi $Q \backslash \overline{\sigma} Q = \{1\}$, deci $u = 1$. Considerăm trasversala parțială $P = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$. Atunci $(R, C) = (4,4)$ şi $v = 3$. Utilizând construcţia Dudek – Derienko obţinem:

	1	2	3	4	5
1		1	3	4	**2**
2	3	2		1	**4**
3	4		1	2	**3**
4	1	4	2	**3**	
5	**2**	**3**	**4**		

$\rightarrow$

$\circ$	1	2	3	4	5
1	5	1	3	4	**2**
2	3	2	5	1	**4**
3	4	5	1	2	**3**
4	1	4	2	**3**	5
5	**2**	**3**	**4**	5	1

Figura 1.4

În lucrarea [110] este propusă o generalizare a construcţiei Dudek – Derienko în spiritul lui Yamamoto, ilustrată cu ajutorul Exemplului 1.3.4.

Exemplul 1.3.4. Fie dat quasigrupul de ordinul 4

$\cdot$	1	2	3	4
1	2	1	3	4
2	3	2	4	1
3	4	3	1	2
4	1	4	2	3

Pătratul latin definit de acest quasigrup posedă patru substituții quasicomplete disjuncte două câte două, date de următoarele seturi de celule: $\{(1,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$, $\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$, $\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$, $\{(1,4),(2,2),(3,3),(4,1)\}$.

	1	2	3	4
1	2	1	3	4
2	3	2	4	1
3	4	3	1	2
4	1	4	2	3

Prelungim acest pătrat latin prin adjuncția a două elemente noi, utilizând substituțiile quasi complete date în galben şi roşu. Considerăm transversalele parțiale $P_1 = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ și $P_2 = \{(1,2),(2,1),(3,4)\}$. Pentru P_1 avem: $(R,C) = (4,4)$, $v = 3$, $u = 1$, iar pentru P_2 avem: $(R,C) = (4,3)$, $v = 2$, $u = 4$.

1. Adăugăm două coloane şi două linii noi şi transferăm în celulele lor elementele respective din celulele transversalelor parțiale P_1 și P_2:

	1	2	3	4	□	□
1	□	□	3	4	2	1
2	□	2	□	1	4	3
3	4	□	1	□	3	2
4	1	4	2	3	□	□
□	2	3	4	□	□	□
□	3	1	□	2	□	□

2. Adăugăm elementele noi 5 și 6 la mulțimea $\{1,2,3,4\}$ pe care este definit quasigrupul inițial. În celulele rămase goale ale transversalei parțiale P_1 (respectiv P_2) din pătratul latin iniţial scriem 5 (respectiv 6). Completăm utlimele două celule ale diagonalei principale cu elementele 1 şi 4, respectiv. Obținem astfel:

	1	2	3	4	5	6
1	5	6	3	4	2	1
2	6	2	5	1	4	3
3	4	5	1	6	3	2
4	1	4	2	3		
5	2	3	4		1	
6	3	1		2		4

3. În final, completăm pătratul latin parţial obţinut pentru a obţine un pătrat latin. Observăm că acest lucru poate fi făcut în mod unic, obținând prelungirea:

$\circ$	1	2	3	4	5	6
1	5	6	3	4	2	1
2	6	2	5	1	4	3
3	4	5	1	6	3	2
4	1	4	2	3	6	5
5	2	3	4	5	1	6
6	3	1	6	2	5	4

O procedură mixtă, în doi paşi, de prelungire a quasigrupurilor

Presupunem că un quasigrup de ordinul n are două transversale distincte. În acest caz putem construi o prelungire a quasigrupului urmând, când este posibil, două metode diferite de construcție. Ilustrăm aceasta în Exemplul 1.3.5.

Exemplul 1.3.5. Considerăm quasigrupul de ordinul 3 dat în Tabelul 1.4. Am observat mai sus că acesta are trei transversale disjuncte două câte două: $T_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, $T_2 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, $T_3 = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$, colorate în 3 culori diferite în tabelul de mai jos:

$\cdot$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Aplicăm construcția propusă de Belyavskaya utilizând transversala T_3 și fixând elementul 2 al acestei transversale și luând drept element nou numărul 4. Obținem astfel următoarea prelungire de ordinul patru:

$*$	1	2	3	4
1	1	2	4	3
2	2	3	1	4
3	3	4	2	1
4	4	1	3	2

În acest caz transversala T_1 (de culoare roșie) trece într-o transversală parțială definită de o funcţie quasicompletă:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \overline{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$Q \backslash \overline{\sigma} Q = \{4\}$. Utilizând acum construcţia Dudek – Derienko, obţinem următoarea prelungire de ordinul cinci:

$\circ$	1	2	3	4	5
1	5	2	4	3	1
2	2	5	1	4	3
3	3	4	5	1	2
4	4	1	3	2	5
5	1	3	2	5	4

Din posibilitatea de a construi prelungiri ale quasigrupurilor finite obținem, în particular, următoarea afirmație.

Propoziția 1.3.1. [71] *Există un quasigrup idempotent de ordinul* m *dacă și numai dacă* $m \geq 3$.

Demonstrație. Această afirmație rezultă din faptul că pentru orice n impar există un grup idempotent de ordinul n, tabla multiplicativă a căruia se descompune în n transversale disjuncte. Dacă $n \neq 1$ atunci prin prelungire utilizând o transversală, alta decât diagonala principală, se poate obţine un quasigrup idempotent de ordin $n + 1$. Este uşor de verificat că niciun quasigrup de ordinul doi nu este idempotent. □

În literatura de specialitate este cunoscută și procedura inversă celei de prelungire a quasigrupurilor. Această procedură se numeşte contracţie a quasigrupurilor. Procedeele de contracţie a quasigrupurilor realizează dintr-un quasigrup de ordinul n un quasigrup de ordin mai mic. Este clar că orice procedură de prelungire posedă o procedură proprie "inversă", de contracţie [12, 13, 57, 79, 83, 84, 126].

1.4. Concluzii la Capitolul 1

În Capitolul 1 este prezentată o analiză a situației în domeniul teoriei quasigrupurilor recursiv derivabile (atât binare cât și de aritate mai mare decât 2), care au fost definite în teoria algebrică a codurilor complete recursive. Studiul quasigrupurilor recursiv derivabile permite, în particular, construcția unor noi MDS-coduri și obținerea unor noi caracterizări ale parametrilor acestor coduri (distanța minimală Hamming, lungime, numărul de cuvinte-cod etc.). Relația dintre parametrii unui cod complet recursiv, în particular, MDS-cod și ordinul de derivabilitate recursivă a unui quasigrup finit pune problema existenței quasigrupurilor finite (binare sau n-are) recursiv derivabile cu ordin dat de derivabilitate recursivă. Printre problemele nesoluționate până în prezent se numără cea referitoare la existența quasigrupurilor binare recursiv 1-derivabile de ordinul 14, 18 sau 26.

Prelungirea quasigrupurilor finite este o metodă cunoscută prin care pot fi obținute quasigupuri de ordin mai mare prin adăugarea unuia sau a mai multor elemente noi la un quasigrup finit şi redefinirea operaţiei acestui quasigrup. În literatura de specialitate sunt cunoscute mai multe metode de prelungire (extindere) a quasigrupurilor finite. Studiul derivabilității recursive a prelungirilor quasigrupurilor reprezintă o posibilitate de a obține caracterizări ale spectrului (ordinului) quasigrupurilor recursiv derivabile. Una dintre abordările existente în elaborarea metodelor de construcție a prelungirilor quasigrupurilor finite este cea care utilizează substituțiile complete, respectiv quasicomplete, ale quasigrupurilor. Substituțiile complete ale unui quasigrup finit definesc transversale în pătratul latin corespunzător. Astfel, metodele de prelungire a quasigrupurilor finite cu ajutorul substituțiilor complete se regăsesc în combinatorică, ca metode de extindere a pătratelor latine ce utilizează transversale ale acestor pătrate latine.

În acest capitol sunt prezentate rezultate generale referitoare la substituțiile complete ale unui quasigrup și la existența transversalelor în pătratele latine. Sunt descrise și ilustrate prin exemple metodele cunoscute de prelungire a quasigrupurilor finite (Bruck, Belousov, Belyavskaya, Dudek-Derienko ș.a.).

Prin urmare, capitolul 1 caracterizează relații dintre structura algebrică de quasigrup, teoria codurilor și aspecte combinatorice ale pătratelor latine, oferind un cadru teoretic riguros pentru construcția quasigrupurilor recursiv derivabile, construcția şi analiza codurilor recursive cu parametri optimali, metode de construcție a prelungirilor quasigrupurilor finite (pătratelor latine).

2. QUASIGRUPURI RECURSIV DERIVABILE

2.1. Quasigrupuri binare recursiv derivabile

Quasigrupurile recursiv derivabile au apărut in teoria codurilor complete recursive, în calitate de funcții de control. Condiția ca derivatele recursive ale unui quasigrup să formeze un sistem puternic ortogonal, este una necesară și suficientă ca un cod complet recursiv să fie un MDS-cod [4, 6]. Pe de altă parte, operațiile unui sistem puternic ortogonal, diferite de selectori, sunt operații de quasigrup, ceea ce implică necesitatea studierii derivabilității recursive a quasigrupurilor, în particular, a quasigrupurilor finite [10]. De asemenea, caracterizarea spectrului quasigrupurilor recursiv derivabile este o problemă care apare în procesul de caracterizare a parametrilor MDS-codurilor, devenită o direcție independentă de cercetare în domeniul teoriei quasigrupurilor.

Definiția 2.1.1. *Fie* $Q(A)$ *un grupoid binar și* $k \in \mathbb{N}$. *Numim derivată recursivă de ordinul* k *a operației* A, *operația* $A^{(k)}$ *definită în felul următor*:

$$A^{(0)}(x, y) = A(x, y),$$

$$A^{(1)}(x, y) = A(y, A(x, y)),$$

$$A^{(k)}(x, y) = A(A^{(k-2)}(x, y), A^{(k-1)}(x, y)), \forall k \geq 2.$$

Dacă notăm $A = " \cdot "$ şi $A^{(k)} = " \overset{k}{\cdot} ", k \in \mathbb{N}$, atunci

$$x \overset{0}{\cdot} y = x \cdot y,$$

$$x \overset{1}{\cdot} y = y \cdot (x \cdot y),$$

$$x \overset{k}{\cdot} y = (x \overset{k-2}{\cdot} y) \cdot (x \overset{k-1}{\cdot} y), \forall\ k \geq 2.$$

Definiția 2.1.2. *Un quasigrup binar* (Q, A) *se numește recursiv s-derivabil* $(s \geq 0)$, *dacă derivatele sale recursive* $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(s)}$ *sunt operații de quasigrup.*

Propoziția 2.1.1. [69] *Un quasigrup binar* $(Q,\cdot)$ *este recursiv 1-derivabil dacă şi numai dacă* $(*) \perp (/)$, *unde* $x * y \overset{def}{=} y \cdot x,\ \forall x, y \in Q$, *iar* $"/"$ *este împărţirea la dreapta în quasigrupul* $(Q,\cdot)$.

Demonstrația acestei afirmații rezultă din echivalențele:

$$\begin{cases} x * y = a \\ x / y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \cdot x = a \\ b \cdot y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \cdot (b \cdot y) = a \\ b \cdot y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \overset{1}{\cdot} y = a \\ b \overset{0}{\cdot} y = x \end{cases}$$

și din faptul că $\overset{0}{\cdot}$ este o operaţe de quasigrup.

Considerăm modul de notare a parastrofilor unui quasigrup binar, utilizat în [9]:

$$^{s}(\cdot) = {}^{(12)}(\cdot),\ \ ^{l}(\cdot) = {}^{(13)}(\cdot),\ \ ^{r}(\cdot) = {}^{(23)}(\cdot).$$

Aplicând Propoziţia 2.1.1 putem deduce condiţiile necesare şi suficiente ca parastrofii unei operaţii de quasigrup recursiv 1-derivabile să fie recursiv 1-derivabili.

Propoziția 2.1.2. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup binar. Sunt adevărate afirmațiile:*

1. $^{l}(\cdot)$ *este recursiv 1-derivabilă daca și numai dacă* $(\cdot) \perp^{lr} (\cdot)$ *;*
2. $^{r}(\cdot)$ *este recursiv 1-derivabilă daca și numai dacă* $^{rl}(\cdot) \perp^{lr} (\cdot)$ *;*
3. $^{rl}(\cdot)$ *este recursiv 1-derivabilă daca și numai dacă* $^{s}(\cdot) \perp^{r} (\cdot)$ *;*
4. $^{lr}(\cdot)$ *este recursiv 1-derivabilă daca și numai dacă* $^{l}(\cdot) \perp^{r} (\cdot)$*;*
5. $^{s}(\cdot)$ *este recursiv 1-derivabilă daca și numai dacă* $(\cdot) \perp^{rl} (\cdot)$*.*

Demonstrație. Conform Propoziţiei 2.1.1, operația $(\cdot)$ este recursiv 1-derivabilă dacă şi numai dacă $^{s}(\cdot) \perp^{l} (\cdot)$. Utilizând relația $^{\beta}(\,^{\alpha}(\cdot)) = {}^{\alpha\beta}(\cdot)$, $\forall \alpha, \beta \in S_3$, avem:

1. $^{l}(\cdot)$ este recursiv 1-derivabilă dacă şi numai dacă

$$^{ls}(\cdot) \perp^{ll} (\cdot) \Leftrightarrow^{ls} (\cdot) \perp (\cdot) \Leftrightarrow^{rl} (\cdot) \perp (\cdot);$$

2. $^{r}(\cdot)$ este recursiv 1-derivabilă dacă şi numai dacă

$$^{rs}(\cdot) \perp^{rl} (\cdot) \Leftrightarrow^{rrlr} (\cdot) \perp^{rl} (\cdot) \Leftrightarrow^{rl} (\cdot) \perp^{lr} (\cdot);$$

3. $^{rl}(\cdot)$ este recursiv 1-derivabilă dacă şi numai dacă

$$^{rls}(\cdot) \perp^{rll} (\cdot) \Leftrightarrow^{rllrl} (\cdot) \perp^{r} (\cdot) \Leftrightarrow^{l} (\cdot) \perp^{r} (\cdot);$$

4. $^{lr}(\cdot)$ este recursiv 1-derivabilă dacă şi numai dacă

$$^{lrs}(\cdot) \perp^{lrl} (\cdot) \Leftrightarrow^{lrrlr} (\cdot) \perp^{s} (\cdot) \Leftrightarrow^{r} (\cdot) \perp^{s} (\cdot);$$

5. $^{s}(\cdot)$ este recursiv 1-derivabilă dacă şi numai dacă

$$^{ss}(\cdot) \perp^{sl} (\cdot) \Leftrightarrow (\cdot) \perp^{lrll} (\cdot) \Leftrightarrow (\cdot) \perp^{lr} (\cdot). \qquad \square$$

Aceste criterii sunt rezumate în următorul tabel:

Parastroful	Condiția necesară şi suficientă de 1-derivabilitate recursivă
$(\cdot)$	${}^{s}(\cdot) \perp^{l} (\cdot)$
${}^{l}(\cdot)$	$(\cdot) \perp^{rl} (\cdot)$
${}^{r}(\cdot)$	${}^{rl}(\cdot) \perp^{lr} (\cdot)$
${}^{rl}(\cdot)$	${}^{l}(\cdot) \perp^{r} (\cdot)$
${}^{lr}(\cdot)$	${}^{s}(\cdot) \perp^{r} (\cdot)$
${}^{s}(\cdot)$	$(\cdot) \perp^{lr} (\cdot)$

Tabelul 2.1

Utilizând rezultatele incluse în Tabelul 2.1 şi faptul că identităţile minimale (din clasificarea dată de V. Belousov în [9]) implică ortogonalitatea unor perechi de parastrofi ai quasigrupului respectiv, putem exprima 1-derivabilitatea recursivă în limbajul identităților.

Propoziția 2.1.3. *Dacă quasigrupul* $(Q,\cdot)$ *verifică identităţile:*

$$x \cdot (y \cdot yx) = y,$$

$$xy \cdot x = y \cdot xy,$$

$$xy \cdot yx = y,$$

atunci toţi cei şase parastrofi ai săi sunt quasigrupuri recursiv 1-derivabile.

Demonstrație. Conform [9], cele trei identități implică ortogonalitatea tuturor perechilor de parastrofi care apar în Tabelul 2.1. □

Propoziția 2.1.4. *Există exact 6 quasigrupuri de ordinul 3 recursiv 1-derivabile.*

Demonstrație. Se ştie că există în total 12 quasigrupuri de ordinul 3. Prezentăm mai jos pătratele latine date de tablele Cayley ale celor 12 quasigrupuri de ordinul 3, definite pe mulțimea $Q = \{1,2,3\}$:

$$L_1: \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ \hline\end{array} \quad L_2: \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ \hline\end{array} \quad L_3: \begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array} \quad L_4: \begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ \hline\end{array}$$

$$L_5: \begin{array}{|ccc|}\hline 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \hline\end{array} \quad L_6: \begin{array}{|ccc|}\hline 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array} \quad L_7: \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array} \quad L_8: \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ \hline\end{array}$$

$$L_9: \begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ \hline\end{array} \quad L_{10}: \begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array} \quad L_{11}: \begin{array}{|ccc|}\hline 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ \hline\end{array} \quad L_{12}: \begin{array}{|ccc|}\hline 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ \hline\end{array}$$

Figura 2.1

Notăm cu $L^{(i)}$ derivata recursivă de ordinul i a quasigrupului dat de pătratul latin L. Prin calcule directe deducem că:

$$L_1^{(1)} = L_7, L_4^{(1)} = L_7^{(1)} = L_{11}^{(1)} = L_8, L_5^{(1)} = L_4, L_{10}^{(1)} = L_{11}$$

Quasigrupurile date de pătratele latine $L_2, L_3, L_6, L_8, L_9, L_{12}$ nu sunt recursive 1-derivabile.

Conform [116] ordinul r de derivabilitate recursivă a unui quasigrup finit de ordinul q verifică inegalitatea $r \leq q - 2$, deci ordinul de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor de ordinul 3 este cel mult 1. □

Corolarul 2.1.1. *Izotopul unui quasigrup binar recursiv 1-derivabil în caz general nu este recursiv 1-derivabil.*

Afirmația rezultă, de exemplu, din faptul că cele 12 quasigrupuri de ordinul 3 sunt izotope între ele însă nu toate sunt recursiv 1-derivabile.

Propoziția 2.1.5. *Există exact 48 de quasigrupuri de ordinul 4 recursiv 1-derivabile, dintre care 8 sunt recursiv 2-derivabile (ordinul maximal posibil).*

Demonstrație. Se știe că există în total 576 de pătrate latine de ordinul 4. Aceste pătrate latine pot fi generate, de exemplu, cu ajutorul unui program (cod) GAP, dat în Anexa 2. Prin verificare directă obținem că 48 de quasigrupuri de ordinul 4 sunt recursiv 1-derivabile. Lista acestor quasigrupuri este dată mai jos.

$$L_1: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&3&2&1\\2&1&4&3\\\hline\end{array} \quad L_2: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&2&3&4\\4&3&2&1\\2&1&4&3\\3&4&1&2\\\hline\end{array} \quad L_3: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&2&4&3\\3&4&2&1\\4&3&1&2\\2&1&3&4\\\hline\end{array} \quad L_4: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&2&4&3\\4&3&1&2\\2&1&3&4\\3&4&2&1\\\hline\end{array}$$

$$L_5: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&3&2&4\\3&1&4&2\\4&2&3&1\\2&4&1&3\\\hline\end{array} \quad L_6: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&3&2&4\\4&2&3&1\\2&4&1&3\\3&1&4&2\\\hline\end{array} \quad L_7: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&3&4&2\\2&4&3&1\\3&1&2&4\\4&2&1&3\\\hline\end{array} \quad L_8: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&3&4&2\\3&1&2&4\\4&2&1&3\\2&4&3&1\\\hline\end{array}$$

$$L_9: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&4&2&3\\2&3&1&4\\3&2&4&1\\4&1&3&2\\\hline\end{array} \quad L_{10}: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&4&2&3\\4&1&3&2\\2&3&1&4\\3&2&4&1\\\hline\end{array} \quad L_{11}: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&4&3&2\\3&2&1&4\\4&1&2&3\\2&3&4&1\\\hline\end{array} \quad L_{12}: \begin{array}{|cccc|}\hline 1&4&3&2\\4&1&2&3\\2&3&4&1\\3&2&1&4\\\hline\end{array}$$

$$L_{13}: \begin{array}{|cccc|}\hline 2&1&3&4\\3&4&2&1\\1&2&4&3\\4&3&1&2\\\hline\end{array} \quad L_{14}: \begin{array}{|cccc|}\hline 2&1&3&4\\4&3&1&2\\3&4&2&1\\1&2&4&3\\\hline\end{array} \quad L_{15}: \begin{array}{|cccc|}\hline 2&1&4&3\\3&4&1&2\\1&2&3&4\\4&3&2&1\\\hline\end{array} \quad L_{16}: \begin{array}{|cccc|}\hline 2&1&4&3\\4&3&2&1\\3&4&1&2\\1&2&3&4\\\hline\end{array}$$

$$L_{17}: \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{matrix}} \quad L_{18}: \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}} \quad L_{19}: \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}} \quad L_{20}: \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{matrix}}$$

$$L_{21}: \boxed{\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{matrix}} \quad L_{22}: \boxed{\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix}} \quad L_{23}: \boxed{\begin{matrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{matrix}} \quad L_{24}: \boxed{\begin{matrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{matrix}}$$

$$L_{25}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{matrix}} \quad L_{26}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{matrix}} \quad L_{27}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{matrix}} \quad L_{28}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix}}$$

$$L_{29}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}} \quad L_{30}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{matrix}} \quad L_{31}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{matrix}} \quad L_{32}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix}}$$

$$L_{33}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}} \quad L_{34}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}} \quad L_{35}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}} \quad L_{36}: \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{matrix}}$$

$$L_{37}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{matrix}} \quad L_{38}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{matrix}} \quad L_{39}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix}} \quad L_{40}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{matrix}}$$

$$L_{41}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{matrix}} \quad L_{42}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{matrix}} \quad L_{43}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix}} \quad L_{44}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{matrix}}$$

$$L_{45}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{matrix}} \quad L_{46}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{matrix}} \quad L_{47}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{matrix}} \quad L_{48}: \boxed{\begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix}}$$

Dintre aceste 48 de pătrate latine recursiv 1-derivabile, exact 8 sunt și recursiv 2-derivabile. Observăm că ordinul posibil de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor de ordinul 4 nu depășește 2 deoarece ordinul r de derivabilitate recursivă a unui quasigrup finit de ordinul q verifică inegalitatea $r \leq q - 2$. Prezentăm mai jos cele 8 pătrate latine de ordinul 4, care sunt recursiv 2-derivabile și derivatele lor recursive de ordinul 2:

$$L_8: \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \quad L_{10}: \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \quad L_{18}: \begin{array}{|cccc|}\hline 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \quad L_{24}: \begin{array}{|cccc|}\hline 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$L_{25}: \begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad L_{31}: \begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad L_{39}: \begin{array}{|cccc|}\hline 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ \hline \end{array} \quad L_{41}: \begin{array}{|cccc|}\hline 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Notând cu $L_i^{(2)}$ derivata recursivă de ordinul 2 a quasigrupului dat de pătratul latin $L_i, i = \overline{1,48}$, obținem:

$$L_8^{(2)}: \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \quad L_{10}^{(2)}: \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad L_{18}^{(2)}: \begin{array}{|cccc|}\hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \quad L_{24}^{(2)}: \begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$L_{25}^{(2)}: \begin{array}{|cccc|}\hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad L_{31}^{(2)}: \begin{array}{|cccc|}\hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad L_{39}^{(2)}: \begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad L_{41}^{(2)}: \begin{array}{|cccc|}\hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

□

În propoziția următoare este dată o condiție necesară și suficientă de 2-derivabilitate recursivă a unui quasigrup binar.

Propoziția 2.1.6. [69] *Un quasigrup binar finit* $(Q,\cdot)$ *este recursiv 2-derivabil dacă şi numai dacă* $(Q,\cdot)$ *verifică implicaţiile:*

1. $y \cdot xy = z \cdot xz \Rightarrow y = z$
2. $xy \cdot (y \cdot xy) = xz \cdot (z \cdot xz) \Rightarrow y = z$, pentru $\forall x, y, z \in Q$.

Quasigrupuri recursiv derivabile pot fi construite utilizând produsul cartezian. Se știe că [39] dacă $(\mathrm{Q}_1, \mathrm{f}_1)$ este un quasigrup recursiv k_1-derivabil şi $(\mathrm{Q}_2, \mathrm{f}_2)$ este un quasigrup recursiv k_2-derivabil, atunci produsul lor direct $(\mathrm{Q}_1 \times \mathrm{Q}_2, \mathrm{f})$, este recursiv k -derivabil, unde $\mathrm{k} = \min\{\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2\}$. Într-adevăr, dacă (Q_1, f_1) este un quasigrup recursiv k_1-derivabil şi (Q_2, f_2) este un quasigrup recursiv k_2-derivabil, atunci produsul lor direct $(Q_1 \times Q_2, f)$, unde $f = (f_1, f_2)$ este recursiv k - derivabil pentru $k = min\{k_1, k_2\}$, deoarece ecuaţiile $f_1^{(k)}(x_1, a_1) = b_1$ şi $f_2^{(k)}(x_2, a_2) = b_2$ au soluţie unică pentru $\forall a_i, b_i \in Q, i = \overline{1,2}$, şi $\forall k \leq k_1$, adică $f^{(k)}(x, a) = b$, au soluţie unică pe $Q_1 \times Q_2$, $\forall k \leq k_1$, unde $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$. Analog se demonstrează că ecuaţiile $f^{(k)}(a, y) = b$, pentru $\forall k \leq k_1$ au soluţie unică pe $Q_1 \times Q_2$.

Definiția 2.1.3. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup şi* θ *o relaţie de echivalenţa pe* Q. θ *se numeşte* congruenţă *dacă, pentru* $\forall c \in Q$, *are loc implicaţia:*

$$x\theta y \Rightarrow \begin{cases} c \cdot x\theta c \cdot y \\ x \cdot c\theta y \cdot c. \end{cases}$$

Propoziția 2.1.7. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup recursiv 1-derivabil şi fie* $(Q,\circ)$ *derivata sa recursivă de ordinul 1:* $x \circ y = y \cdot xy, \forall x, y \in Q$. *Atunci orice congruenţă a quasigrupului* $(Q,\cdot)$ *este o congruenţă şi în* $(Q,\circ)$.

Demonstrație. Fie θ o congruenţă în $(Q,\cdot)$. Atunci:

$$x\theta y \Rightarrow \begin{cases} cx\theta cy \\ xc\theta yc \\ \forall c \in Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot cx\theta x \cdot cy \\ c \cdot xc\theta c \cdot yc \\ x\theta y \\ \forall c \in Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot cx\theta x \cdot cy \\ c \cdot xc\theta c \cdot yc \\ x \cdot cy\theta y \cdot cy \\ \forall c \in Q \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \cdot cx\theta y \cdot cy \\ c \cdot xc\theta c \cdot yc \\ \forall c \in Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \circ x\theta c \circ y \\ x \circ c\theta y \circ c \\ \forall c \in Q \end{cases}$$

Prin urmare θ este congruenţă în $(Q,\circ)$. □

Definiția 2.1.4. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup şi* $a \in Q$, *atunci:*

1. *funcţia* $R_a: Q \mapsto Q, R_a(x) = xa, \forall x \in Q$ *se numeşte translaţie la dreapta cu elementul* a;
2. *funcţia* $L_a: Q \mapsto Q, L_a(x) = ax, \forall x \in Q$ *se numeşte translaţie la stânga cu elementul* a.

Notăm:

$$\langle L_a | a \in Q \rangle = LM(Q,\cdot),$$

$$\langle R_b | b \in Q \rangle = RM(Q,\cdot)$$

$$\langle L_a, R_b | a, b \in Q \rangle = M(Q,\cdot)$$

Fiecare din mulțimile $LM(Q,\cdot)$, $RM(Q,\cdot)$, $M(Q,\cdot)$ formează grup în raport cu operatia de compunere a funcțiilor și se numesc, respectiv, grupul multiplicativ la stânga, grupul multiplicativ la dreapta, grupul multiplicativ al quasigrupului $(Q,\cdot)$.

Propoziția 2.1.8. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup recursiv 1-derivabil şi fie* $(Q,\circ)$ *derivata sa recursivă de ordinul 1. Au loc incluziunile:*

a) $RM(Q,\circ) \subseteq M(Q,\cdot)$;

b) $Aut(Q,\cdot) \subseteq Aut(Q,\circ)$.

Demonstrație. Dacă $(Q,\cdot)$ este un quasigrup recursiv 1-derivabil şi $(Q,\circ)$ este derivata sa recursivă de ordinul 1, atunci $x \circ y = y \cdot xy, \forall x, y \in Q,$ deci $R_y^{(\circ)}(x) = L_y^{(\cdot)} R_y^{(\cdot)}(x), \forall x, y \in Q$, de unde rezultă $R_y^{(\circ)} = L_y^{(\cdot)} R_y^{(\cdot)}, \forall y \in Q$. Prin urmare, $RM(Q,\circ) \subseteq M(Q,\cdot)$.

Pentru a demonstra incluziunea b), observăm că:

$$\varphi \in Aut(Q,\cdot) \Rightarrow \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \Rightarrow \varphi(y) \cdot \varphi(xy) = \varphi(y) \cdot \varphi(x)\varphi(y) \Rightarrow$$

$$\varphi(y \cdot xy) = \varphi(y) \cdot \varphi(x)\varphi(y) \Rightarrow \varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y), \forall x, y \in Q,$$

deci $\varphi \in Aut(Q,\circ)$. □

Dacă $(Q,\cdot)$ este un quasigrup recursiv 1-derivabil şi $(Q,\circ)$ este derivata sa recursivă de ordinul 1, atunci $Aut(Q,\cdot)$ poate fi scufundat în $AutRM(Q,\circ)$, respectiv, în $AutLM(Q,\circ)$, $AutM(Q,\circ)$, deoarece $Aut(Q,\cdot) \leq Aut(Q,\circ)$, iar $Aut(Q,\circ)$ este izomorf cu un subgrup al grupului $AutRM(Q,\circ)$.

Definiția 2.1.5. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup. Funcția bijectivă* $\varphi: Q \mapsto Q$, *care satisface relaţia*

$$\varphi(x \cdot yx) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)\varphi(x), \text{ pentru } \forall x, y \in Q,$$

se numeşte semiautomorfism al quasigrupului $(Q,\cdot)$.

Notăm cu $SAut(Q,\cdot)$ mulţimea tuturor semiautomorfismelor quasigrupului $(Q,\cdot)$.

Propoziția 2.1.9. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup și fie* $(Q,\circ)$ *- derivata sa recursivă de ordinul 1. Sunt adevărate afirmaţiile:*

1. *Mulţimea* $SAut(Q,\cdot)$ *formează grup în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.*
2. $Aut(Q,\circ) = SAut(Q,\cdot)$.
3. $SAut(Q,\cdot) \subseteq SAut(Q,\circ)$.

Demonstrație. 1. Deoarece $SAut(Q,\cdot)$ este o submulţime a mulţimii tuturor aplicaţiilor bijective pe Q, pentru a demonstra că $SAut(Q,\cdot)$ formează grup e suficient de arătat că este parte stabilă în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor şi împreună cu fiecare semiautomorfism conţine şi inversul său. Fie $\varphi, \phi \in SAut(Q,\cdot)$, atunci:

$$\phi\varphi(y \cdot xy) = \phi\big(\varphi(y) \cdot \varphi(x)\varphi(y)\big) = \phi\varphi(y) \cdot \phi\varphi(x)\phi\varphi(y),$$

pentru $\forall x, y \in Q \Rightarrow \phi\varphi \in SAut(Q,\cdot)$. De asemenea,

$$\varphi^{-1}\varphi(y \cdot xy) = y \cdot xy = \varphi^{-1}\varphi(y) \cdot \varphi^{-1}\varphi(x)\varphi^{-1}\varphi(y), \forall x, y \in Q \Leftrightarrow \varphi^{-1}(b \cdot ab) =$$

$$= \varphi^{-1}(b) \cdot \varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(b), \forall a, b \in Q \Rightarrow \varphi^{-1} \in SAut(Q,\cdot)$$

2. Fie $\varphi \in Aut(Q,\circ)$, atunci $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$, deci $\varphi(y \cdot xy) = \varphi(y) \cdot \phi(x)\varphi(y)$, pentru $\forall x, y \in Q$. Prin urmare $\varphi \in SAut(Q,\cdot)$, de unde rezultă $Aut(Q,\circ) \subseteq SAut(Q,\cdot)$.

Considerăm acum $\phi \in SAut(Q,\cdot)$. Avem: $\phi(y \cdot xy) = \phi(y) \cdot \phi(x)\phi(y) \Rightarrow \phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y)$, pentru $\forall x, y \in Q$. Astfel $\phi \in Aut(Q,\circ)$, adică $Aut(Q,\circ) \supseteq SAut(Q,\cdot)$. Prin urmare, $Aut(Q,\circ) = SAut(Q,\cdot)$.

3. Fie $\varphi \in SAut(Q,\cdot)$. Conform 2, $\varphi \in Aut(Q,\circ)$, adică $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$. Prin urmare

$$\varphi(y \circ (x \circ y)) = \varphi(y) \circ \varphi(x \circ y) = \varphi(y) \circ [\varphi(x) \circ \varphi(y)],$$

pentru $\forall x, y \in Q$, deci $\varphi \in SAut(Q,\circ)$, de unde rezultă $SAut(Q,\cdot) \subseteq SAut(Q,\circ)$. □

Vom prezenta mai jos un algoritm de construcție a quasigrupurilor binare liniare (peste $\mathbb{Z}_n$), care sunt recursiv derivabile de ordin înalt.

Conform Lemei 1.1.2, dacă $(Q,*)$ este un quasigrup binar, atunci, pentru orice $x, y \in Q$ şi $\forall s \geq 1$,

$$x \overset{s}{*} y = y \overset{s-1}{*} (x * y). \tag{2.1}$$

Lema 2.1.1. *Fie* $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *şi* $x * y = ax + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1. *Există* $u_s,\ v_s \in \mathbb{Z}$ *astfel încât* $x \overset{s}{*} y = u_s x + v_s y,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}, \forall s \geq 1$;

2. *Dacă* $n \geq 2$ *este un număr natural,* $k \in \{1, \dots, n-1\}$ *şi* $a = n - k$, *atunci există* $b_{s+2} \in \mathbb{Z}$ *astfel încât* $v_{s+2} = nb_{s-2} + (-kc_s + c_{s+1})$, *pentru* $\forall s \geq 1$, *unde* c_s *şi* c_{s+1} *sunt resturile de la împărţirea lui* v_s *şi* v_{s+1} *la* n, *respectiv.*

Demonstrație. 1. În acest caz $x \overset{1}{*} y = y * (x * y) = ax + (a+1)y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Notând $x \overset{s-1}{*} y = u_{s-1}x + v_{s-1}y$ şi utilizând inducţia matematică şi (2.1), obţinem

$$x \overset{s}{*} y = u_{s-1}y + v_{s-1}(ax + y) = av_{s-1}x + (u_{s-1} + v_{s-1})y.$$

2. Deoarece $x \overset{s+2}{*} y = (x \overset{s}{*} y) * (x \overset{s+1}{*} y) = (au_s + u_{s+1})x + (av_s + v_{s+1})y$, au loc următoarele egalităţi:

$$v_{s+2} = av_s + v_{s+1} = (n-k)(nb_s + c_s) + (nb_{s+1} + c_{s+1}) =$$

$$n(nb_s + c_s - kb_s + b_{s+1}) + (-kc_s + c_{s+1})$$

unde c_s şi c_{s+1} sunt resturile de la împărţirea lui v_s şi v_{s+1} la n, respectiv. □

Teorema 2.1.1. *Fie* $n \geq 2, a = n-k, k \in \{1, \dots, n-1\}, (a,n) = 1$ *şi* $x * y = \overline{a}x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}_n$. *Dacă, pentru un oarecare* $s \geq 1$, *derivatele recursive* $(\mathbb{Z}_n, \overset{s}{*})$ *şi* $(\mathbb{Z}_n, \overset{s+1}{*})$*, unde* $x \overset{i}{*} y = \overline{u_i}x + \overline{v_i}y$, $i = s, s+1$, *sunt quasigrupuri, atunci* $(\mathbb{Z}_n, \overset{s+2}{*})$ *este un quasigrup dacă şi numai dacă* $(-kc_s + c_{s+1}, n) = 1$, *unde* c_s *şi* c_{s+1} *sunt resturile de la împărţirea lui* v_s *şi* v_{s+1} *la* n, *respectiv.*

Demonstrație. Considerăm operaţia $x * y = \overline{a}x + y$ în inelul $\mathbb{Z}_n$ al claselor de resturi modulo n, unde $(a,n) = 1$. Atunci $(\mathbb{Z}_n, *)$ este un quasigrup şi, conform Lemei 2.1.2, există $\overline{u_s}, \overline{v_s} \in \mathbb{Z}_n$ astfel încât $x \overset{s}{*} y = \overline{u_s}x + \overline{v_s}y, \forall s \geq 0$. Avem:

$$x \overset{s+2}{*} y = \overline{u_{s+2}}x + \overline{v_{s+2}}y = \overline{av_{s+1}}x + (\overline{u_{s+1}} + \overline{v_{s+1}})y,$$

deci $\overline{v_{s+2}} = \overline{u_{s+1}} + \overline{v_{s+1}} = \overline{-kc_s + c_{s+1}}$, unde c_s şi c_{s+1} sunt resturile de la împărţirea lui v_s şi v_{s+1} la n, respectiv.

Dacă $(\mathbb{Z}_n, \overset{s}{*})$ şi $(\mathbb{Z}_n, \overset{s+1}{*})$ sunt quasigrupuri, atunci $(av_{s+1}, n) = 1$, deci $(\mathbb{Z}_n, \overset{s+2}{*})$ este un quasigrup dacă şi numai dacă $(-kc_s + c_{s+1}, n) = 1$. □

Utilizând Teorema 2.1.1. obţinem, de exemplu, că quasigrupurile $(\mathbb{Z}_7, *), x * y = 4x + y$, şi $(\mathbb{Z}_{11}, *)$, $x * y = 3x + y$, sunt recursiv 5- şi 9-derivabile, respectiv. Reamintim că ordinul r de derivabilitate recursivă a unui quasigrup binar, definit peste o mulţime de q elemente, satisface inegalitatea $r \leq q - 2$. Următorul corolar prezintă toate valorile elementului a pentru care quasigrupul $(\mathbb{Z}_p, *)$, unde $x * y = \overline{a}x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}_p$, este recursiv derivabil de ordin maximal, pentru orice prim impar $p \leq 19$.

Propoziția 2.1.10. *Fie* $(\mathbb{Z}_p, *)$, *unde* $x * y = \overline{a}x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}_p$, *este un quasigrup. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1. $(\mathbb{Z}_3, *)$ *este recursiv 1-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 1$;
2. $(\mathbb{Z}_5, *)$ *este recursiv 3-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 3$;

3. $(\mathbb{Z}_7,*)$ *este recursiv 5-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 1$ *sau* 4*;*

4. $(\mathbb{Z}_{11},*)$ *este recursiv 9-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 3$ *sau* 4*;*

5. $(\mathbb{Z}_{13},*)$ *este recursiv 11-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 5{,}8$ *sau* 11*;*

6. $(\mathbb{Z}_{17},*)$ *este recursiv 15-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 7$ *sau* 10*;*

7. $(\mathbb{Z}_{19},*)$ *este recursiv 17-derivabil dacă şi numai dacă* $a = 1{,}5$ *sau* 7.

Demonstrație. Conform Teoremei 2.1.1 $(\mathbb{Z}_p,*)$ este un quasigrup, unde

$$x * y = (p-k)x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}_p$$

În Tabelul 2.2 prezentăm valorile primilor 20 termeni ai șirului $(t_i)_{i\geq 1}$ unde:

$$t_0 = 1, t_1 = -k+1,$$

$$t_{s+2} = -kt_s + t_{s+1}, \forall s \geq 0, \forall k = 2, \dots, 10$$

Quasigrupul binar $(\mathbb{Z}_p,*)$ este recursiv r-derivabil, dacă t_{r+1} este divizibil cu p, iar toți termenii $t_0, \dots, t_r$ nu sunt divizibili cu p. Utilizând Tabelul 2.2 avem:

1. Pentru quasigrupul $(\mathbb{Z}_3,*)$ se ia în considerare doar linia cu $k = 2$ și obținem:

$$a = p - k = 3 - 2 = 1,$$

prin urmare $(\mathbb{Z}_3,*)$ este recursiv 1-derivabil.

2. Pentru quasigrupul $(\mathbb{Z}_5,*)$ evaluăm primele trei linii ale Tabelului 2.1, cercetând valorile lui k:

a) $k = 2,\ a = p - k = 5 - 2 = 3,$ deci $(\mathbb{Z}_5,*)$ este recursiv 3-derivabil,

b) $k = 3,\ a = p - k = 5 - 3 = 2,$ deci $(\mathbb{Z}_5,*)$ este recursiv 1-derivabil,

c) $k = 4,\ a = p - k = 5 - 4 = 1,$ deci $(\mathbb{Z}_5,*)$ este recursiv 2-derivabil,

Ordinul maximal de derivabilitate recursivă este 3 pentru $a = 3$.

3. Pentru $(\mathbb{Z}_7,*)$ se iau în considerare primele cinci linii ale Tabelului 2.1:

a) $k = 2,\ a = 7 - 2 = 5, \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_7,*)$ este recursiv 4-derivabil,

b) $k = 3,\ a = 7 - 3 = 4, \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_7,*)$ este recursiv 5-derivabil,

c) $k = 4,\ a = 7 - 4 = 3, \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_7,*)$ este recursiv 1-derivabil,

d) $k = 5,\ a = 7 - 5 = 2, \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_7,*)$ este recursiv 3-derivabil,

e) $k = 6,\ a = 7 - 6 = 1, \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_7,*)$ este recursiv 5-derivabil.

Ordinul maximal de derivabilitate recursivă este 5 și se obține în cazurile când $a = 1$ sau 4.

4. Pentru $(\mathbb{Z}_{11},*)$ evaluăm toate liniile Tabelului 2.1:

a) $k = 2,\ a = 11 - 2 = 9, \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{11},*)$ este recursiv 7-derivabil,

b) $k = 3,\ a = 11 - 3 = 8,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{11},*)$ este recursiv 8-derivabil,

c) $k = 4,\ a = 11 - 4 = 7,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{11},*)$ este recursiv 3-derivabil,

d) $k = 5,\ a = 11 - 5 = 6,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{11},*)$ este recursiv 2-derivabil,

e) $k = 6,\ a = 11 - 6 = 5,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{11},*)$ este recursiv 1-derivabil,

f) $k = 7,\ a = 11 - 7 = 4,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{11},*)$ este recursiv 9-derivabil,

g) $k = 8,\ a = 11 - 8 = 3,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{11},*)$ este recursiv 9-derivabil,

h) $k = 9,\ a = 11 - 9 = 2,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{11},*)$ este recursiv 2-derivabil,

i) $k = 10,\ a = 11 - 10 = 1,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{11},*)$ este recursiv 7-derivabil.

Ordinul maximal de derivabilitate recursivă este 9 și se obține în cazurile când $a = 3$ sau 4.

5. Pentru $(\mathbb{Z}_{13},*)$ se iau în considerare toate liniile Tabelului 2.1:

a) $k = 2,\ a = 13 - 2 = 11,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{13},*)$ este recursiv 11-derivabil,

b) $k = 3,\ a = 13 - 3 = 10,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{13},*)$ este recursiv 4-derivabil,

c) $k = 4,\ a = 13 - 4 = 9,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{13},*)$ este recursiv 4-derivabil,

d) $k = 5,\ a = 13 - 5 = 8,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{13},*)$ este recursiv 11-derivabil,

e) $k = 6,\ a = 13 - 6 = 7,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{13},*)$ este recursiv 9-derivabil,

f) $k = 7,\ a = 13 - 7 = 6,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{13},*)$ este recursiv 1-derivabil,

g) $k = 8,\ a = 13 - 8 = 5 \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{13},*)$ este recursiv 11-derivabil,

h) $k = 9,\ a = 13 - 9 = 4,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{13},*)$ este recursiv 3-derivabil,

i) $k = 10,\ a = 13 - 10 = 3,\ \Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_{13},*)$ este recursiv 10-derivabil.

Ordinul maximal de derivabilitate recursivă este 11 și se obține în cazurile când $a = 5, 8$ sau 11.

Analog se demonstrează și pentru $\mathbb{Z}_{17}$ și $\mathbb{Z}_{19}$. □

k	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	t_{16}	t_{17}	t_{18}	t_{19}	t_{20}
2	-1	-3	-1	5	7	-3	-17	-11	23	45	-1	-91	-89	93	271	85	-457	-627	287	1541
3	-2	-5	1	16	13	-35	-74	31	253	160	-599	-1079	718	3955	1801	-10064	-15467	14725	61126	16951
4	-3	-7	5	33	13	-119	-171	305	989	-231	-4187	-3263	13485	26537	-27403	-133551	-23939	510265	606021	-1435039
5	-4	-9	11	56	1	-279	-284	1111	2531	-3024	-15679	-559	77836	80631	-308549	-711704	831041	4389561	234356	-21713449
6	-5	-11	19	85	-29	-539	-365	2869	5059	-12155	-42509	30421	285475	102949	-1609901	-2227595	7431811	20797381	-23793485	-148577771
7	-6	-13	29	120	-83	-923	-342	6119	8513	-34320	-93911	146329	803706	-220597	-5846539	-4302360	36623413	66739933	-189623958	-656803489
8	-7	-15	41	161	-167	-1455	-119	11521	12473	-79695	-179479	458081	1893913	-1770735	-16922039	-2756159	132620153	154669425	-906291795	-2143647200
9	-8	-17	55	208	-287	-2159	424	19855	16039	-162656	-307007	1156897	3919960	-6492113	-41717553	16657264	392603041	242687665	-3290739710	-5474928700
10	-9	-19	71	261	-449	-3059	1431	32021	17711	-302499	-479609	2545381	7341471	-18112339	-91527049	89596341	1004866831	108903421	-9939764889	-11028799099

Tabelul 2.2

În Tabelul 2.3 sunt date estimările cunoscute $r_0 \leq r$ pentru ordinul r de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor binare finite de ordinul $q \leq 200$. În celula cu coordonatele (m, k) sunt date valorile cunoscute ale parametrului r pentru quasigrupurile de ordinul $m + k$. Menţionăm că celula $(0,0)$ conţine valoarea cunoscută a lui r pentru quasigrupurile de ordinul 200. În [38] este dat un tabel analog care conţine lungimea maximală a MDS-codurilor recursive, definită de quasigrupurile de ordin până la 100. Noi utilizăm acest tabel în primele zece linii ale Tabelului 2.3.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0(200)	$r \geq 2$	0	0	1	2	3	0	5	6	7
10	1	9	1	11		1	14	15		17
20	2	2	1	21	2	23		25	2	27
30	1	29	30	1	1	3	1	35	1	2
40	1	39	1	41	2	1	1	45	1	47
50	4	1	2	51	3	3	5	4	4	57
60	2	59	3	5	62	4	3	65	3	3
70	4	69	6	71	3	3	3	5	4	77
80	5	79	3	81	4	4	4	3	6	87
90	3	5	4	3	4	4	4	95	4	7
100	2	99	1	101	6	1	1	105	1	107
110	1	1	5	111	1	3	2	1	1	5
120	1	119	1	1	2	123	1	125	126	1
130	1	129	1	5	1	1	6	135	1	137
140	2	1	1	9	1	3	1	1	2	147
150	1	149	6	1	1	3	1	155	1	1
160	3	5	1	161	2	1	1	165	1	167
170	1	1	2	171	1	3	5	1	1	177
180	2	179	1	1	6	3	1	9	2	1
190	1	189	1	191	1	1	2	195	1	197

Tabelul 2.3

2.2. Grupuri binare recursiv derivabile

Derivabilitatea recursivă a grupurilor abeliene finite este caracterizată în [69]. În caz general, caracterizarea spectrului grupurilor finite rîmâne o problemă deschisă.

Propoziția 2.2.1. [69] *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup abelian. Pentru orice* $\forall n \geq 3$, *și orice* $x, y, a \in G$, *au loc egalitățile:*

$$x \overset{n}{\cdot} a = x^{b_n} \cdot a^{b_{n+1}};\ a \overset{n}{\cdot} y = y^{b_{n+1}} \cdot a^{b_n},$$

unde $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *este şirul lui Fibonacci:*

$$b_1 = b_2 = 1, b_k = b_{k-2} + b_{k-1}, \forall k \geq 3.$$

Schema demonstrației. (Aplicăm metoda inducției matematice după n)

Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian, atunci:

$$x \overset{0}{\cdot} a = x \cdot a, a \overset{0}{\cdot} y = a \cdot y,$$

$$x \overset{1}{\cdot} a = a \cdot xa = x \cdot a^2, a \overset{1}{\cdot} y = y \cdot ay = y^2 \cdot a,$$

$$x \overset{2}{\cdot} a = xa \cdot (a \cdot xa) = x^2 \cdot a^3 = x^{b_2} \cdot a^{b_3},$$

$$a \overset{2}{\cdot} y = ay \cdot (y \cdot ay) = a^2 \cdot y^3 = a^{b_2} \cdot y^{b_3} = y^{b_3} \cdot a^{b_2}.$$

Presupunem că afirmaţia are loc pentru $n \leq k$:

$$x \overset{k-1}{\cdot} a = x^{b_{k-1}} \cdot a^{b_k};\ x \overset{k}{\cdot} a = x^{b_k} \cdot a^{b_{k+1}};$$

$$a \overset{k-1}{\cdot} y = y^{b_k} \cdot a^{b_{k-1}};\ a \overset{k}{\cdot} y = y^{b_{k+1}} \cdot a^{b_k}.$$

Verificăm pentru $n = k + 1$:

$$x \overset{k+1}{\cdot} a = \left(x \overset{k+1-2}{\cdot} a\right) \cdot \left(x \overset{k+1-1}{\cdot} a\right) = \left(x \overset{k-1}{\cdot} a\right) \cdot \left(x \overset{k}{\cdot} a\right) = \left(x \overset{k-1}{\cdot} a\right) \cdot (x^{b_k} \cdot a^{b_{k+1}}) =$$

$$= x^{b_{k-1}} \cdot a^{b_k} \cdot x^{b_k} \cdot a^{b_{k+1}} = x^{b_{k+1}} \cdot a^{b_{k+2}},$$

$$a \overset{k+1}{\cdot} y = \left(a \overset{k+1-2}{\cdot} y\right) \cdot \left(a \overset{k+1-1}{\cdot} y\right) = \left(a \overset{k-1}{\cdot} y\right) \cdot \left(a \overset{k}{\cdot} y\right) = \left(a \overset{k-1}{\cdot} y\right) \cdot (a^{b_k} \cdot y^{b_{k+1}}) =$$

$$= a^{b_{k-1}} \cdot y^{b_k} \cdot a^{b_k} \cdot y^{b_{k+1}} = y^{b_{k+2}} \cdot a^{b_{k+1}}.$$

Prin urmare am obţinut că

$$x \overset{k+1}{\cdot} a = x^{b_{k+1}} \cdot a^{b_{k+2}} \text{ şi } a \overset{k+1}{\cdot} y = y^{b_{k+2}} \cdot a^{b_{k+1}}.$$

Astfel am observat că exponenţii obţinuţi sunt elemente ale şirului lui Fibonacci, pentru $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Din Propoziţia 2.2.1. rezultă următoarea afirmație.

Propoziția 2.2.2. *Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian finit și fie că $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şirul lui Fibonacci*, unde $b_1 = b_2 = 1$. *Sunt adevărate afirmaţiile:*

1. Grupul $(G,\cdot)$ este recursiv k-derivabil dacă şi numai dacă funcția $\varphi_i(x) = x^{b_i}$ este injectivă pentru fiecare $i = \overline{1, k+1}$.

2. Grupul $(G,\cdot)$ este recursiv k-derivabil dacă şi numai dacă $x^{b_i} \neq e, \forall x \in G \setminus \{e\}$, $i = \overline{1, k+1}$.

3. Orice grup abelian finit de ordin impar este recursiv 1-derivabil.

4. *Orice grup abelian finit de ordin par nu este recursiv* 1-*derivabil.*

Demonstrație. 1. Dacă $(G,\cdot)$ este un grup abelian finit, atunci conform Propoziţiei 2.2.1.:

$$x \overset{n}{\cdot} a = x^{b_n} \cdot a^{b_{n+1}} \text{ şi}$$

$$a \overset{n}{\cdot} y = y^{b_{n+1}} \cdot a^{b_n}.$$

Prin urmare avem

$$x \overset{n}{\cdot} a = b \Leftrightarrow x^{b_n} \cdot a^{b_{n+1}} = b \Leftrightarrow x^{b_n} = b \cdot a^{-b_{n+1}}.$$

Deci ecuaţia $x \overset{n}{\cdot} a = b$ are soluţie unică dacă şi numai dacă funcția $\varphi_n(\mathrm{x}) = x^{b_n}$ este injectivă.

Analog obţinem:

$$a \overset{n}{\cdot} y = b \Leftrightarrow y^{b_{n+1}} \cdot a^{b_n} = b \Leftrightarrow y^{b_{n+1}} = b \cdot a^{-b_n}.$$

Deci ecuaţia $a \overset{n}{\cdot} y = b$ are soluţie unică dacă şi numai dacă funcția $\varphi_{n+1}(\mathrm{x}) = x^{b_{n+1}}$ este injectivă. Prin urmare "$\overset{n}{\circ}$" este operaţie de quasigrup dacă şi numai dacă funcţiile φ_n, φ_{n+1} sunt injective.

Astfel am obţinut că $(G,\cdot)$ este recursiv k-derivabil dacă $\varphi_i = x^{b_i}$ este aplicaţie injectivă pentru orice $i = \overline{1, k+1}$.

Fie acum $(G,\cdot)$ un grup abelian recursiv k-derivabil. Atunci ecuaţiile de forma $x \overset{i}{\cdot} a = b, a \overset{i}{\cdot} y = b$ au soluţie unică pentru orice $i = \overline{1, k}$. Deci, conform Propoziţiei 2.2.1., ecuaţiile $x^{b_i} \cdot a^{b_{i+1}} = b, y^{b_{i+1}} \cdot a^{b_i} = b$ au cîte o singură soluţie pentru orice $i = \overline{1, k}$. Adică

$$x_1^{b_i} \cdot a^{b_{i+1}} = x_2^{b_i} \cdot a^{b_{i+1}} \Rightarrow x_1 = x_2,$$

$$y_1^{b_{i+1}} \cdot a^{b_i} = y_2^{b_{i+1}} \cdot a^{b_i} \Rightarrow y_1 = y_2$$

pentru orice $i = \overline{1, k}$, ceea ce este echivalent cu faptul că funcţiile φ_n, φ_{n+1} sunt injective.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian finit recursiv k-derivabil. Atunci, conform p.1, $\varphi_i(x) = x^{b_i}$ este aplicaţie injectivă, deci şi surjectivă, pentru $i = \overline{1, k+1}$, unde $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şirul lui Fibonacci. Notând cu e unitatea grupului $(G,\cdot)$ avem: $\varphi_i(x) = e \Leftrightarrow x^{b_i} = e \Leftrightarrow x = e,\ i = \overline{1, k+1}$. Din injectivitatea funcţiilor $\varphi_i(x) = x^{b_i}$, rezultă că $x^{b_i} \neq e, \forall x \in G\backslash\{e\},\ i = \overline{1, k+1}$. Fie acum $(G,\cdot)$ un grup abelian finit pentru care are loc $x^{b_i} \neq e, \forall x \in G\backslash\{e\},\ i = \overline{1, k+1}$. Pentru a demonstra că $(G,\cdot)$ este recursiv k-derivabil este suficient de demonstrat că funcţia $\varphi_i(x) = x^{b_i}$ este injectivă pentru $i = \overline{1, k+1}$. Fie că $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$, atunci

$$x^{b_i} = y^{b_i} \Leftrightarrow x^{b_i} \cdot y^{-b_i} = e \Leftrightarrow (x \cdot y^{-1})^{b_i} = e \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} = e \Leftrightarrow x = y.$$

Prin urmare aplicaţia $\varphi_i(x) = x^{b_i}$ este injectivă pentru $i = \overline{1, k+1}$ şi, conform p.1, $(G,\cdot)$ este recursiv k-derivabil.

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian finit de ordin impar. Atunci, pentru $\forall x \in G\backslash\{e\}, x^2 \neq e$, unde e este unitatea grupului G. Astfel am obţinut că $x^{b_i} \neq e,\ \forall x \in G\backslash\{e\}, i = \overline{1,3}$, unde $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şirul lui Fibonacci. Conform p.2., rezultă că $(G,\cdot)$ este recursiv 1-derivabil.

4. Dacă $(G,\cdot)$ este un grup abelian finit de ordin par, atunci $\exists x \in (G,\cdot)$ astfel încât $x^2 = e$, unde e este unitatea grupului G. Prin urmare, G nu este recursiv 1-derivabil. □

2.3. Quasigrupuri n-are recursiv derivabile

Definiția 2.3.1. *Fie $Q(A)$ un grupoid n-ar. Numim derivată recursivă de ordinul k a operaţiei A, operaţia*

$$A^{(k)}(x_1^n) = \begin{cases} A(x_{k+1}^n, A^{(0)}(x_1^n), \ldots, A^{(k-1)}(x_1^n)), dacă\ k < n, \\ A(A^{(k-n)}(x_1^n), \ldots, A^{(k-1)}(x_1^n)), dacă\ k \geq n. \end{cases}$$

Prin definiţie considerăm $A^{(0)}(x_1^n) = A(x_1^n)$.

Definiția 2.3.2. *Fie $Q(A)$ un quasigrup n-ar. Dacă $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots, A^{(s)}$ sunt quasigrupuri n-are, atunci $Q(A)$ se numeşte quasigrup recursiv s-derivabil.*

Lema 2.3.1. *Fie $n \geq 2$ şi fie (Q_i, A_i) un n-quasigrup recursiv r_i-derivabil, $i = 1, \ldots, m$. Atunci produsul lor direct $(Q_1 \times \ldots \times Q_m, B)$, dat de*

$$B((x_{11}^{1m}), \ldots, (x_{n1}^{nm})) = (A_1(x_{11}^{n1}), \ldots, A_m(x_{1m}^{nm})), \tag{2.2}$$

pentru orice $(x_{11}^{1m}), \ldots, (x_{n1}^{nm}) \in Q_1 \times \ldots \times Q_m$, este un n-quasigrup recursiv r-derivabil, unde $r = min\{r_1, \ldots, r_m\}$.

Demonstrație. Reamintim că un quasigrup n-ar (Q, B) este un quasigrup n-ar dacă fiecare element u_i din egalitatea $B(u_1, \ldots, u_n) = u_{n+1}$ este determinat în mod unic de către n elemente rămase. Prin urmare, din (2.2) avem că $(Q_1 \times \ldots \times Q_m, B)$ este un n-quasigrup. Pentru a găsi derivatele recursive ale lui B vom considera următoarele 2 cazuri:

(i) $1 \leq t < n$:

$$B^{(t)}\big((x_{11}^{1m}),\dots,(x_{n1}^{nm})\big) =$$

$$= B((x_{t+1,1}^{t+1,m}),\dots,(x_{n1}^{nm}), B^{(0)}((x_{11}^{1m}),\dots,(x_{n1}^{nm})),\dots, B^{(t-1)}((x_{11}^{1m}),\dots,(x_{n1}^{nm}))) =$$

$$= B\left(\left(x_{t+1,1}^{t+1,m}\right),\dots,(x_{n1}^{nm}), \left(A_1^{(0)}(x_{11}^{n1}),\dots,A_m^{(0)}(x_{1m}^{nm})\right),\dots,\left(A_1^{(t-1)}(x_{11}^{n1}),\dots,A_m^{(t-1)}(x_{1m}^{nm})\right)\right) =$$

$$= (A_1^{(t)}(x_{11}^{n1}),\dots,A_m^{(t)}(x_{1m}^{nm}));$$

(ii) $t \geq n$:

$$B^{(t)}((x_{11}^{1m}),\dots,(x_{n1}^{nm})) = B(B^{(t-n)}((x_{11}^{1m}),\dots,(x_{n1}^{nm})),\dots,B^{(t-1)}((x_{11}^{1m}),\dots,(x_{n1}^{nm}))) =$$

$$= B((A_1^{(t-n)}(x_{11}^{n1}),\dots,A_m^{(t-n)}(x_{1m}^{nm})),\dots,(A^{(t-1)}(x_{11}^{n1}),\dots,A_m^{(t-1)}(x_{1m}^{nm}))) =$$

$$= (A_1(A_1^{(t-n)}(x_{11}^{n1}),\dots,A_1^{(t-1)}(x_{11}^{n1})),\dots,A_m(A_m^{(t-n)}(x_{1m}^{nm}),\dots,A_m^{(t-1)}(x_{1m}^{nm}))) =$$

$$= (A_1^{(t)}(x_{11}^{n1}),\dots,A_m^{(t)}(x_{1m}^{nm})).$$

Prin urmare,

$$B^{(t)}((x_{11}^{1m}),\dots,(x_{n1}^{nm})) = (A_1^{(t)}(x_{11}^{n1}),\dots,A_m^{(t)}(x_{1m}^{nm}),$$

pentru orice $t \geq 1$ şi orice $(x_{11}^{1m}),\dots,(x_{n1}^{nm}) \in Q_1 \times\ldots\times Q_m$. Deoarece fiecare din operaţiile $A_1,\dots,A_m$ este recursiv r-derivabilă, unde $r = min\{r_1,\dots,r_m\}$, obţinem că B este recursiv r-derivabil. □

Propoziția 2.3.1. *Fie* $(Q,\cdot)$ *este un grup binar finit şi* $n \geq 2$. *Grupul* n*-ar* (Q,B), *unde* $B(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot\ldots\cdot x_n, \forall x_1,x_2,\dots,x_n \in Q$, *este recursiv 1-derivabil dacă şi numai dacă funcţia* $x \to x^2$ *este o bijecţie în* $(Q,\cdot)$.

Demonstrație. n-Grupul (Q,B) este recursiv 1-derivabil dacă şi numai dacă derivata recursivă $B^{(1)}$ este o operaţie de quasigrup, adică dacă şi numai dacă în egalitatea

$$B^{(1)}(x_1,\dots,x_n) = b, \tag{2.3}$$

orice n elemente determină în mod unic elementul al $(n+1)$-lea rămas. Luând $x_j = a_j \in Q$ în (2.3), pentru orice $j = 2,\dots,n$, obţinem ecuaţia $x_1 \cdot a_2 \cdot\ldots\cdot a_n = b$, care are o soluţie unică în Q. Pentru $i \in \{2,\dots,n\}$, luând $x_j = a_j \in Q, \forall j \neq i$, $j \in \{1,\dots,n\}$, avem:

$$B^{(1)}(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)=b$$

$$\Leftrightarrow B(a_2,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n,B(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n))=b \Leftrightarrow$$

$$a_2\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot x_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_1\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot x_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_n=b \Leftrightarrow$$

$$(a_1\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot x_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_n)^2=a_1\cdot b.$$

Prin urmare, notând $a_1\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot x_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_n$ prin y, obţinem că n-grupul (Q,B) este recursiv 1-derivabil dacă şi numai dacă, pentru orice $b\in Q$, ecuaţia $y^2=b$ are o soluţie unică. □

Corolarul 2.3.1. *Există n-quasigrupuri finite recursiv 1-derivabile de orice ordin impar $q\geq 3$, pentru orice $n\geq 2$.*

Demonstrație. Această afirmaţie rezultă din faptul că funcția $x\to x^2$ este o bijecţie în orice grup binar finit de ordin impar $q\geq 3$. □

Teorema 2.3.1. *Fie $(Q,\cdot)$ este un grup abelian binar finit şi fie $n\geq 2, r\geq 1$ două numere naturale. Grupul n-ar (Q,B), unde $B(x_1^n)=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$, pentru orice $x_1,x_2,\ldots,x_n\in Q$, este recursiv r-derivabil dacă şi numai dacă funcțiile $x\to x^{s_i^k}$ sunt bijecţii în grupul $(Q,\cdot)$, $\forall i=1,\ldots,n$ şi pentru orice $k=1,\ldots,r$, unde șirurile $(s_i^k)_{k\geq 0}$ sunt definite în felul următor:*

1. $k=0$

$$s_1^0=\ldots=s_n^0=1;$$

2. $1\leq k<n$

$$s_t^k=s_t^0+\ldots+s_t^{k-1},\quad \forall t=1,\ldots,k;$$

$$s_t^k=1+s_t^0+\ldots+s_t^{k+1},\quad \forall t=k+1,\ldots,n;$$

3. $k\geq n$

$$s_t^k=s_t^{k-n}+\ldots+s_t^{k-1},\ \forall t=1,\ldots,n.$$

Demonstrație. Deoarece $(Q,\cdot)$ este un grup abelian şi $B^{(0)}(x_1^n)=x_1\cdot\ldots\cdot x_n$, derivatele recursive $B^{(1)}$ şi $B^{(2)}$ sunt următoarele:

$$B^{(1)}(x_1^n)=B(x_2,\ldots,x_n,B^{(0)}(x_1^n))=x_2\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_n=x_1\cdot x_2^2\cdot\ldots\cdot x_n^2;$$

$$B^{(2)}(x_1^n)=B(x_3,\ldots,x_n,B^{(0)}(x_1^n),B^{(1)}(x_1^n))=x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_1\cdot x_2^2\cdot\ldots\cdot x_n^2=$$

$$=x_1^2\cdot x_2^3\cdot x_3^4\cdot\ldots\cdot x_n^4.$$

Fie $B^{(k)}(x_1^n) = x_1^{s_1^k} \cdot x_2^{s_2^k} \cdot\ldots\cdot x_n^{s_n^k}$, unde $k \geq 0$. Pentru a găsi șirurile $(s_i^k)_{k\geq 0}$, unde $i = 1, \ldots, n$, vom considera următoarele două cazuri:

1. $0 \leq k < n$

$$B^{(k)}(x_1^n) = B\left(x_{k+1}, \ldots, x_n, B^{(0)}(x_1^n), \ldots, B^{(k-1)}(x_1^n)\right) =$$

$$= x_{k+1} \cdot\ldots\cdot x_n \cdot x_1^{s_1^0} \cdot\ldots\cdot x_n^{s_n^0} \cdot\ldots\cdot x_1^{s_1^{k-1}} \cdot\ldots\cdot x_n^{s_n^{k-1}} =$$

$$= x_1^{s_1^0+\ldots+s_1^{k-1}} \cdot\ldots\cdot x_k^{s_k^0+\ldots+s_k^{k-1}} \cdot x_{k+1}^{1+s_{k+1}^0+\ldots+s_{k+1}^{k-1}} \cdot\ldots\cdot x_n^{1+s_n^0+\ldots+s_n^{k-1}};$$

2. $k \geq n$

$$B^{(k)}(x_1^n) = B(B^{(k-n)}(x_1^n), \ldots, B^{(k-1)}(x_1^n)) = B^{(k-n)}(x_1^n) \cdot\ldots\cdot B^{(k-1)}(x_1^n) =$$

$$= x_1^{s_1^{k-n}+\ldots+s_1^{k-1}} \cdot\ldots\cdot x_n^{s_n^{k-n}+\ldots+s_n^{k-1}}.$$

Derivatele recursive $B^{(k)}$, unde $k = 1,2, \ldots, r$, sunt operaţii de quasigrup dacă şi numai dacă funcțiile $x \to x^{s_i^k}$ sunt bijecţii în grupul $(Q,\cdot)$, $\forall i = 1, \ldots, n$ şi $\forall k = 1, \ldots, r$. □

Corolarul 2.3.2. [69] *Grupul abelian binar finit* $(Q,\cdot)$ *este recursiv* r*-derivabil* $(r \geq 1)$ *dacă şi numai dacă funcţiile* $x \to x^{s_i^k}$ *sunt bijecţii,* $\forall i = 1,2$ *și* $\forall k = 1, \ldots, r$*, unde șirurile* $(s_1^k)_{k\geq 0}$ *şi* $(s_2^k)_{k\geq 0}$ *sunt definite în felul următor:* $s_1^0 = s_2^0 = 1$; $s_1^1 = 1, s_2^1 = 2$; $s_i^k = s_i^{k-2} + s_i^{k-1}$, pentru orice $k \geq 2$ și orice $i = 1,2$.

2.4. Concluzii la Capitolul 2

Quasigrupurile recursiv derivabile finite joacă un rol important în teoria algebrică a codurilor complete recursive, fiind utilizate la construcția și caracterizarea parametrilor acestor coduri. Ordinul maximal de derivabilitate recursivă a unui quasigrup binar finit, de ordinul q, nu depășește $q - 2$ [115] și această margine superioară se atinge, de exemplu, în cazul quasigrupurilor finite de ordin primar. Însă determinarea acestui ordin maximal rămâne o problemă deschisă în caz general. De asemenea, în prezent nu se cunoaște daca există quasigrupuri binare recursiv 1-derivabile de ordinul 14, 18 sau 26. Problema determinării ordinului maximal de derivabilitate recursivă este deschisă și în cazul quasigrupurilor n-are finite $(n \geq 3)$.

În Capitolul 2 sunt prezentate proprietăți algebrice ale quasigrupurilor binare și n-are, în particular ale grupurilor binare și n-are. Sunt date criterii de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor binare, fiind caracterizată 1-derivabilitatea recursivă a parastrofilor lor (Propoziția 2.1.2), sunt determinate relații între unele grupuri (grupul multiplicativ, grupul multiplicativ la dreapta, grupul automorfismelor, grupul semiautomorfismelor) unui quasigrup recursiv 1-derivabil și cele ale derivatei sale recursive de ordinul 1 (Propozițiile 2.1.7 și 2.1.8). În Teorema 2.1.1 este caracterizată s-derivabilitatea recursivă a quasigrupului $(\mathbb{Z}_n,*)$, unde $x * y = \bar{a}\, x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}_n, (a, n) = 1$, $(s \geq 1)$. Aplicând această teoremă, în Propoziția 2.1.10 sunt obținute exemple de quasigrupuri recursive $(q-2)$ - derivabile de ordin prim $3 \leq q \leq 19$.

În Propozițiile 2.1.4 și 2.1.5 sunt determinate toate quasigrupurile recursiv 1-derivabile de ordinul 3 și, respectiv 4, și toate quasigrupurile recursiv 2-derivabile de ordinul 4. Se arată că există 6 quasigrupuri de ordinul 3 recursiv 1-derivabile, 48 quasigrupuri recursiv 1-derivabile de ordinul 4 și 8 quasigrupuri recursiv 2-derivabile de ordinul 4.

În Tabelul 2.3 sunt date estimările cunoscute $r_0 \leq r$ pentru ordinul r de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor binare finite de ordinul $q \leq 200$.

În paragraful 2.2 sunt studiate grupurile binare recursiv derivabile. Pentru criteriul de s-derivabilitate recursivă a grupurilor abeliene finite, dat în [69], sunt prezentate noi condiții echivalente (Propoziția 2.2.2).

În ultimul paragraf al Capitolului 2 sunt cercetate quasigrupurile n-are recursiv derivabile. Rezultatul principal al acestui paragraf se conține în Teorema 2.3.1, unde este dat un criteriu de r-derivabilitate recursivă $(r \geq 1)$ a grupului n-ar (Q, B), unde $B(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n, (Q,\cdot)$ fiind un grup abelian binar finit și $n \geq 2$. Acest rezultat generalizează în caz $n-$ar criteriul obținut de V. Izbash și P. Syrbu pentru grupurile abeliene finite în [69].

3. DERIVABILITATEA RECURSIVĂ A UNOR PRELUNGIRI ALE QUASIGRUPURILOR

3.1. Derivabilitatea recursivă a prelungirilor quasigrupurilor, construite prin metoda lui Belousov

Unul dintre scopurile noastre este de a determina condiţiile necesare şi suficiente pentru ca prelungirile quasigrupurilor binare finite, obţinute utilizând construcţiile Bruck şi Belousov să fie recursiv 1-derivabile. Fie $(Q,\cdot)$ un quasigrup finit de ordinul q şi $Q = \{1,2,\dots,q\}$ astfel încât funcția $x \mapsto x \cdot x$ este o bijecţie. Atunci diagonala principală a tablei Cayley a lui $(Q,\cdot)$ este o transversală, a cărei elemente sunt date de funcția $\theta: Q \mapsto Q, \theta(x) = x \cdot x$. Bruck a considerat astfel de prelungiri pentru quasigrupurile idempotente, adică în cazul $\theta = \varepsilon,$ unde ε - substituţia identică pe Q.

Conform metodei lui Bruck, prelungirea $(Q',\circ)$ a quasigrupului $(Q,\cdot)$, unde $Q = \{1,\dots,q\}$ şi $Q' = Q \cup \{\xi\}, \xi \notin Q$, este definită în felul următor:

$$x \circ y = \begin{cases} x \cdot y \ \ dacă \ \ x \neq y \ \ și \ \ x, \ y \in Q; \\ \xi \ \ dacă \ \ x = y \ \ și \ \ x \in Q; \\ \theta(x) \ \ dacă \ \ y = \xi \ \ și \ \ x \in Q; \\ \theta(y) \ \ dacă \ \ x = \xi \ \ și \ \ y \in Q; \\ \xi \ \ dacă \ \ x = y = \xi. \end{cases} \tag{3.1}$$

Deci, prelungirea $(Q',\circ)$ este un quasigrup cu tabla Cayley:

$\circ$	1	...	q	ξ
1	ξ	...	...	$\theta(1)$
...	...	...	...	...
q	...	...	ξ	$\theta(q)$
ξ	$\theta(1)$	...	$\theta(q)$	ξ

Tabelul 3.1.

unde $x \circ y = x \cdot y$, pentru orice $x \neq y$ din Q.

Remarcăm că nu orice transversală de pe diagonala principală dă o prelungire recursiv 1-derivabilă, așa cum rezultă din următoarea afirmaţie.

Propoziția 3.1.1. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup finit astfel încât funcția* $\theta: Q \mapsto Q,\ \theta(x) = x \cdot x$ *este o bijecţie. Dacă prelungirea* $(Q',\circ)$ *dată în (3.1), unde* $Q' = Q \cup \{\xi\},\ \xi \notin Q$*, este un quasigrup, atunci*

$\theta(x) \neq x, \forall x \in Q$.

Demonstrație. Într-adevăr, dacă există un element $a \in Q$ astfel încât $a = \theta(a) = a \cdot a$, atunci utilizând (3.1) obţinem:

$$a \overset{1}{\circ} a = a \cdot (a \cdot a) = a \cdot a = a \text{ şi } \xi \overset{1}{\circ} a = a \cdot (\xi \cdot a) = a \cdot \theta(a) = a \cdot a = a,$$

deci $(Q', \circ)$ nu poate fi un quasigrup. □

Dacă funcția $\theta: Q \mapsto Q$, $\theta(x) = x \cdot x$ este o bijecţie şi $\theta(x) \neq x$, $\forall x \in Q$, atunci spunem că prelungirea $(Q', \circ)$ dată de Tabelul 3.1 este obținută prin metoda Bruck modificată.

Lema 3.1.1. *Fie* $(Q, \cdot)$ *un quasigrup finit de ordinul* $n, Q = \{1, \ldots, n\}$ *şi* $Q' = Q \cup \{\xi\}$ *unde* $\xi \notin Q$. *Dacă funcția* $\theta: Q \mapsto Q$, $\theta(x) = x \cdot x$ *este o bijecţie şi* $\theta(x) \neq x$, $\forall x \in Q$, *atunci derivata recursivă de ordinul 1 a operaţiei* "$\circ$", *dată în (3.1), este următoarea:*

$$x \overset{1}{\circ} y = \begin{cases} y \cdot (x \cdot y) \ \textit{dacă} \ y \neq x \cdot y, \ x \neq y, \ x, y \in Q; \\ \xi \ \textit{dacă} \ y = x \cdot y \ x \neq y, \ x, y \in Q; \\ \theta(y) \ \textit{dacă} \ x = y, \ x \in Q; \\ \theta^2(x) \ \textit{dacă} \ y = \xi, \ x \in Q; \\ y \cdot \theta(y) \ \textit{dacă} \ x = \xi, \ y \in Q; \\ \xi \ \textit{dacă} \ x = y = \xi. \end{cases} \tag{3.2}$$

Demonstrație. Utilizând (3.1) şi faptul că $x \overset{1}{\circ} y = y \circ (x \circ y), \forall x, y \in Q'$, avem:

$$x \overset{1}{\circ} y = \begin{cases} y \circ (x \cdot y) \ \textit{dacă} \ x \neq y \ \textit{și} \ x, y \in Q; \\ y \circ \xi \ \textit{dacă} \ x = y, \ y \in Q; \\ \xi \circ \theta(x) \ \textit{dacă} \ y = \xi, \ x \in Q; \\ y \circ \theta(y) \ \textit{dacă} \ x = \xi, \ y \in Q; \\ \xi \ \textit{dacă} \ x = y = \xi. \end{cases}$$

Acum, utilizând (3.1) pentru "$\circ$" în formulele precedente, obţinem:

$$x \overset{1}{\circ} y = \begin{cases} y \cdot (x \cdot y) \ \textit{dacă} \ y \neq x \cdot y, \ x \neq y \ \textit{și} \ x, y \in Q; \\ \xi \ \textit{dacă} \ y = x \cdot y, \ x \neq y \ \textit{și} \ x, y \in Q; \\ \theta(y) \ \textit{dacă} \ x = y, \ y \in Q; \\ \theta^2(x) \ \textit{dacă} \ y = \xi, \ x \in Q; \\ y \cdot \theta(y) \ \textit{dacă} \ x = \xi, \ y \neq \theta(y), \ y \in Q; \\ \xi \ \textit{dacă} \ x = \xi, \ y = \theta(y), \ y \in Q; \\ \xi \ \textit{dacă} \ x = y = \xi. \end{cases}$$

Dacă funcția $\theta: Q \mapsto Q$, $\theta(x) = x \cdot x$ este o bijecţie şi $\theta(x) \neq x$, $\forall x \in Q$, atunci prelungirea $(Q', \circ)$ este un quasigrup şi derivata sa recursivă $(\overset{1}{\circ})$ este definită aşa cum este arătat în (3.2).

Conform Lemei 3.1.1, tabla Cayley a derivatei recursive $(Q',\overset{1}{\circ})$ este următoarea:

$\overset{1}{\circ}$	…	x	…	y	…	ξ
…	…	…	…	…	…	…
x	…	$\theta(x)$	…	z	…	$\theta^2(x)$
…	…	…	…	…	…	…
ξ	…	$x \cdot \theta(x)$	…	…	…	ξ

Tabelul 3.2

unde

$$z = \begin{cases} y \cdot (x \cdot y) \ \ dacă \ \ y \neq x \cdot y; \\ \xi \ \ dacă \ \ y = x \cdot y. \end{cases}$$

Teoremă 3.1.1. *Fie* $(Q,\cdot)$ *este un quasigrup finit astfel încât funcția* $\theta: Q \mapsto Q,\ \theta(x) = x \cdot x$ *este o bijecţie şi* $\theta(x) \neq x, \forall x \in Q$. *Atunci prelungirea* $(Q',\circ)$, *obţinută utilizând metoda Bruck modificată, unde* $Q' = Q \cup \{\xi\}$, $\xi \notin Q$, *este recursiv 1-derivabilă dacă şi numai dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:*

1. $\{f_x \mid x \in Q\} = Q$, *unde* $f_x \cdot x = x, \forall x \in Q$;
2. θ *este o substituţie completă a lui* $(Q,\cdot)$;
3. *pentru orice* $x \in Q, \{\theta(x), y \cdot (x \cdot y), \theta^2(x) \mid y \in Q,\ x \neq y,\ y \neq x \cdot y\} = Q$.

Demonstrație. Conform Propoziţiei 3.1.1, condiţia $\theta(x) \neq x, \forall x \in Q$, implică faptul că prelungirea $(Q',\circ)$ este un quasigrup, deci ecuaţia $x \overset{1}{\circ} a = b \Leftrightarrow a \circ (x \circ a) = b$ are o soluţie unică în $(Q',\overset{1}{\circ})$ şi, prin urmare, liniile în Tabelul 3.2 sunt permutări ale lui Q'. Pentru $x, y \in Q$, intrarea celulei (x, y) este ξ dacă şi numai dacă $y = x \cdot y$, adică dacă şi numai dacă $x = f_y$ este unitatea locală la stânga a lui y. Deci ξ va apărea exact o dată în fiecare linie şi fiecare coloană a Tabelului 3.2 dacă şi numai dacă $\{f_y \mid y \in Q\} = Q$. Linia elementului ξ în Tabelul 3.2 este permutare a lui Q' dacă şi numai dacă $x \mapsto x \cdot \theta(x)$ este o bijecţie în Q, adică dacă şi numai dacă θ este o substituţie completă a lui $(Q,\cdot)$. În final, linia lui $x \in Q$ este o permutare a lui Q' dacă şi numai dacă

$$\{\theta(x), y \cdot (x \cdot y), \theta^2(x) \ \ | x \neq y, y \neq x \cdot y, y \in Q\} = Q. \ \square$$

Exemplul 3.1.1. Considerăm quasigrupul $(Q,\cdot)$, dat de tabla:

$\cdot$	1	2	3
1	**2**	1	3
2	1	**3**	2
3	3	2	**1**

Prelungirea $(Q',\circ)$, unde $Q' = Q \cup \{\xi\}$, $\xi \not\in Q$, obţinută utilizând transversala $T = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ *este următoarea:*

$\circ$	1	2	3	ξ
1	ξ	1	3	2
2	1	ξ	2	3
3	3	2	ξ	1
ξ	2	3	1	ξ

Derivata recursivă de ordinul 1 a prelungirii $(Q',\circ)$:

$\overset{1}{\circ}$	1	2	3	ξ
1	2	1	ξ	3
2	ξ	3	2	1
3	3	ξ	1	2
ξ	1	2	3	ξ

este un quasigrup, deci $(Q',\circ)$ este recursiv 1-derivabil.

Metoda de prelungire a lui Belousov utilizează o transversală arbitrară a tablei Cayley, nu neapărat una de pe diagonala principală. Fie că $\{(x,\theta(x)) \mid x \in Q\}$, unde $\theta \in S_Q$, este o transversală a unui quasigrup finit $(Q,\cdot)$. Atunci funcția $\theta': Q \to Q, \theta'(x) = x \cdot \theta(x)$ este o bijecţie. Conform metodei lui Belousov, prelungirea $(Q',\circ)$, unde $Q' = Q \cup \{\xi\}$, $\xi \not\in Q$, este definită în felul următor:

$$x \circ y = \begin{cases} x \cdot y \ \ dacă \ \ y \neq \theta(x) \ \ și \ \ x, \ y \in Q; \\ \xi \ \ dacă \ \ y = \theta(x) \ \ și \ \ x, \ y \in Q; \\ \theta'(\theta^{-1}(y)) \ \ dacă \ \ x = \xi \ \ și \ \ y \in Q; \\ \theta'(x) \ \ dacă \ \ y = \xi \ \ și \ \ x \in Q; \\ \xi \ \ dacă \ \ x = y = \xi. \end{cases} \tag{3.3}$$

Observăm că dacă θ' este o bijecţie, atunci $(Q',\circ)$ este un quasigrup cu următoarea tablă Cayley:

$\circ$	...	$\theta(x)$	...	y	...	ξ
...	...	...	...	...	...	...
x	...	$\theta'(x)$	...	$x \cdot y$	...	$\theta'(x)$
...	...	...	...	...	...	...
ξ	...	...	...	$\theta'\left(\theta^{-1}(x)\right)$	...	ξ

Tabelul 3.3

Propoziția 3.1.2. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup finit și* $\theta \in S_Q$ *astfel încât* $\theta': Q \to Q, \theta'(x) = x \cdot \theta(x)$ *este o bijecţie. Atunci derivata recursivă* $(Q',\overset{1}{\circ})$ *a prelungirii* $(Q',\circ)$ *dată în (3.3) este următoarea:*

$$x \overset{1}{\circ} y = \begin{cases} y \cdot (x \cdot y) \ \ dacă \ \ y \neq \theta(x \cdot y), \ y \neq \theta(x) \ \ și \ \ x, \ y \in Q; \\ \xi \ \ dacă \ \ y = \theta(x \cdot y), \ y \neq \theta(x) \ \ și \ \ x, \ y \in Q; \\ \theta'(\theta(x)) \ \ dacă \ \ y = \theta(x) \ \ și \ \ x, y \in Q; \\ y \cdot \theta'(\theta^{-1}(y)) \ \ dacă \ \ y \neq \theta(\theta'(\theta^{-1}(y))), \ x = \xi \ \ și \ \ y \in Q; \\ \xi \ \ dacă \ \ y = \theta(\theta'(\theta^{-1}(y))), \ x = \xi \ \ și \ \ y \in Q; \\ \theta'(\theta^{-1}(\theta'(x))) \ \ dacă \ \ y = \xi \ \ și \ \ x \in Q; \\ \xi \ \ dacă \ \ x = y = \xi. \end{cases} \tag{3.4}$$

Demonstrație. Într-adevăr (3.4) rezultă din (3.3), utilizând definiţia derivatei recursive $x \overset{1}{\circ} y = y \circ (x \circ y)$, $\forall x, y \in Q$. □

Dacă $y = \theta(\theta'(\theta^{-1}(y)))$, unde $y \in Q$, atunci $\xi \overset{1}{\circ} y = \xi = \xi \overset{1}{\circ} \xi$, deci $(Q',\overset{1}{\circ})$ nu este un quasigrup. Acum, utilizând (3.4) obţinem următoarea afirmaţie.

Lema 3.1.2. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup finit, fie* $\theta \in S_Q$ *astfel încât* $\theta': Q \mapsto Q, \ \theta'(x) = x \cdot \theta(x)$ *este o bijecţie şi fie* $y \neq \theta(\theta'(\theta^{-1}(y))), \forall y \in Q$*. Atunci derivata recursivă* $(Q',\overset{1}{\circ})$ *a prelungirii* $(Q',\circ)$*, conform metodei lui Belousov, este:*

$$x \overset{1}{\circ} y = \begin{cases} y \cdot (x \cdot y) \ \ dacă \ \ y \neq \theta(x \cdot y), \ y \neq \theta(x) \ \ și \ \ x, \ y \in Q; \\ \xi \ \ dacă \ \ y = \theta(x \cdot y), \ y \neq \theta(x) \ \ și \ \ x, \ y \in Q; \\ \theta'(\theta(x)) \ \ dacă \ \ y = \theta(x) \ \ și \ \ x, y \in Q; \\ y \cdot \theta'(\theta^{-1}(y)) \ \ dacă \ \ x = \xi \ \ și \ \ y \in Q; \\ \theta'(\theta^{-1}(\theta'(x))) \ \ dacă \ \ y = \xi \ \ și \ \ x \in Q; \\ \xi \ \ dacă \ \ x = y = \xi. \end{cases} \tag{3.5}$$

Demonstrație. Demonstraţia rezultă din (3.4) şi condiţia $y \neq \theta(\theta'(\theta^{-1}(y))), \forall y \in Q$. □

Tabla Cayley a derivatei recursive $(Q',\overset{1}{\circ})$, dată în (3.5), este următoarea:

$\overset{1}{\circ}$	...	$\theta(x)$	...	y	...	ξ
...	...	...	...	...	...	...
x	...	$\theta'(\theta(x))$	...	ω	...	$\theta'\left(\theta^{-1}(\theta'(x))\right)$
...	...	...	...	...	...	...
ξ	...	...	...	$y \cdot \theta'(\theta^{-1}(y))$	...	ξ

Tabelul 3.4

unde

$$w = \begin{cases} y \cdot xy \ \ dac\breve{a} \ \ y \neq \theta(x \cdot y), \ y \neq \theta(x); \\ \xi \ \ dac\breve{a} \ \ y = \theta(x \cdot y), \ y \neq \theta(x). \end{cases}$$

Teorema 3.1.2. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un quasigrup finit,* $\theta \in S_Q$ *astfel încât funcţia* $\theta' : Q \mapsto Q$, $\theta'(x) = x \cdot \theta(x)$ *este o bijecţie şi fie* $\theta^{-1}(y) \neq \theta'(\theta^{-1}(y)), \forall y \in Q$. *Atunci prelungirea* $(Q',\circ)$, *obținută prin metoda lui Belousov, este recursiv 1-derivabilă dacă şi numai dacă următoarele condiţii au loc:*

1. $\{\theta^{-1}(y)/y \mid y \in Q\} = Q$;
2. *substituţia* $y \mapsto y \cdot \theta'(\theta^{-1}(y))$ *este o bijecţie în* Q;
3. *pentru orice* $x \in Q$, $\{\theta'(\theta(x)), y \cdot xy, \theta'(\theta^{-1}(\theta'(x))) | y \neq \theta(x \cdot y), y \neq \theta(x), y \in Q\} = Q$.

Demonstrație. Conform metodei lui Belousov, $(Q',\circ)$ este un quasigrup, deci ecuaţia $x \overset{1}{\circ} a = b \Leftrightarrow a \circ (x \circ a) = b$ are o soluţie unică în Q', pentru orice $a, b \in Q'$. Prin urmare liniile din tabla Cayley (3.5) sunt permutări ale lui Q'. Elementul ξ apare în celulele (x, y) cu $x, y \in Q$ pentru $y = \theta(x \cdot y)$, $y \neq \theta(x)$, adică pentru $x = \theta^{-1}(y)/y$. Dacă $(Q',\overset{1}{\circ})$ este un quasigrup, atunci $\{\theta^{-1}(y)/y \mid y \in Q\} = Q$. Conform Tabelului 3.4, linia lui ξ este o permutare a lui Q' dacă şi numai dacă funcţia $y \mapsto y \cdot \theta'(\theta^{-1}(y))$ este o bijecţie peste Q. În final, linia lui $x \in Q$ în Tabelul 3.4, este o permutare a lui Q' dacă şi numai dacă condiţia a 3-a este îndeplinită. □

Exemplul 3.1.2. Considerăm quasigrupul $(Q,\cdot)$, dat de tabla:

$\cdot$	1	2	3
1	2	3	1
2	1	2	3
3	3	1	2

Prelungirea $(\mathrm{Q}',\circ)$, unde $Q' = Q \cup \{\xi\}$, $\xi \notin Q$, obţinută utilizând transversala $\mathrm{T} = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$ este următoarea:

$\circ$	1	2	3	ξ
1	2	ξ	1	3
2	ξ	2	3	1
3	3	1	ξ	2
ξ	1	3	2	ξ

Derivata recursivă de ordinul 1 a prelungirii $(Q',\circ)$:

$\overset{1}{\circ}$	1	2	3	ξ
1	ξ	1	3	2
2	3	2	ξ	1
3	1	ξ	2	3
ξ	2	3	1	ξ

este un quasigrup, deci $(Q',\circ)$ este recursiv 1-derivabil.

3.2. Metoda de prelungire a quasigrupurilor prin utilizarea a două trasversale care se intersectează într-o singură celulă

După cum am menționat anterior, prin "prelungire" a unui quasigrup finit înțelegem un proces de extindere a quasigrupului prin adăugarea unuia sau mai multor elemente noi şi redefinirea operaţiei pentru a obține un quasigrup nou de ordin mai mare. În acest paragraf vom considera o metodă de construcție a prelungirilor unui quasigrup finit prin utilizarea a două trasversale (ale tablei Cayley a quasigrupului) care se intersectează într-un singur punct. Amintim că transversală (obișnuită) a unui pătrat latin de ordinul n este un set din n celule luate câte una din fiecare linie și fiecare coloană, în care elementele sunt distincte două câte două. În acest paragraf vom utiliza noțiunea mai generală de transversală liberă, definită mai jos.

Definița 3.2.1. *Numim transversală liberă a unui pătrat latin L de ordinul n, orice set din n celule luate exact câte una din fiecare linie și din fiecare coloană ale lui L.*

Propoziția 3.2.1. *Un pătrat latin de ordinul n poate avea cel mult $n-2$ transversale obișnuite care se intersectează într-un singur punct, fiind disjuncte 2 câte două în celelalte puncte.*

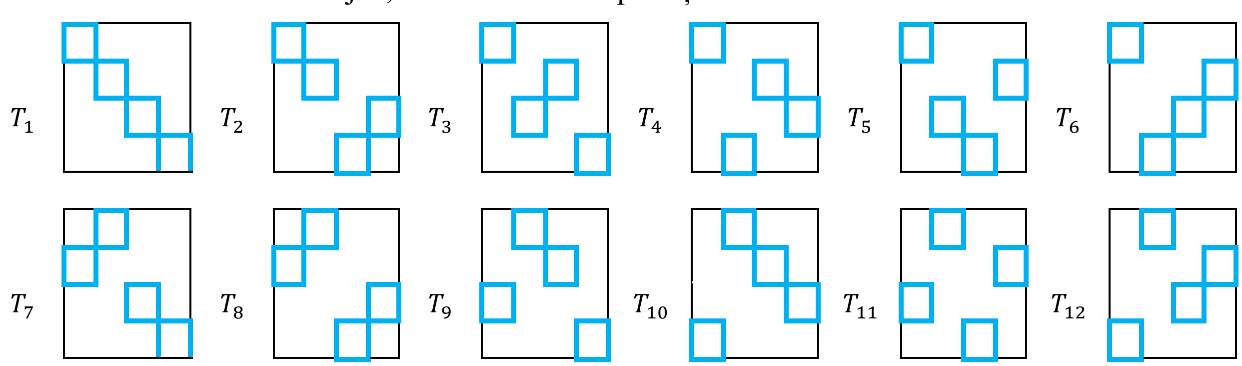
Demonstrație. Fie că într-un pătrat latin de ordinul n am fixat $n-2$ transversale (obișnuite) care se intersectează într-o singură celulă şi fie coordonatele acestei celule (x, y).

Notăm cu "a" elementul din celula (x, y). Deoarece $n-2$ transversale au exact un punct comun (punctul din celula (x, y)), fiind disjuncte 2 câte două în celelalte puncte, pentru construcţia celei de-a $n-1$ transversale în fiecare linie diferită de x şi fiecare coloană diferită de y vom avea câte 2 celule, în una dintre care este elementul "a". Cel de-al doilea element se va afla într-o celulă din linia lui x sau coloana lui y, respectiv. Prin urmare nu vom putea construi o nouă transversală deoarece s-ar repeta sau elementul "a" sau elementele ar fi din aceeaşi linie (sau coloană). □

Corolarul 3.2.1. *Nu există pătrate latine de ordinul 3 cu 2 transversale care să se intersecteze exact într-un punct.*

Propoziția 3.2.2. *Pătratul latin de ordinul patru posedă exact 24 de transversale libere.*

Demonstrație. Fie L un pătrat latin de ordinul patru. Orice transversală liberă a pătratului latin L are exact o celulă în prima linie a lui L. Fixând o celulă în prima linie a lui L găsim toate transversalele libere posibile ale lui L care conțin această celulă. Observăm (epuizând toate cazurile posibile) că pentru fiecare celulă din prima linie a lui L există exact șase transversale libere, care conțin celula dată. Deci numărul total de transversale libere ale pătratului latin este 24. Aceste transversale libere sunt date în schemele de mai jos, fiind marcate în pătrățele:



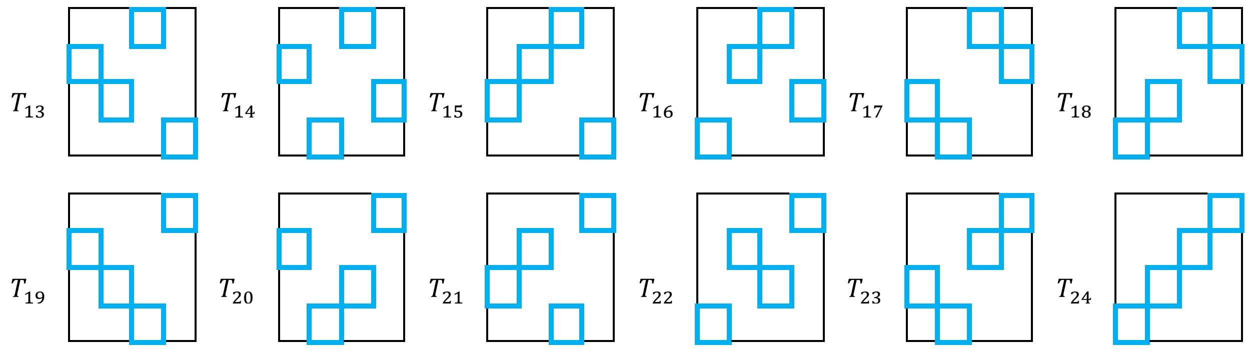


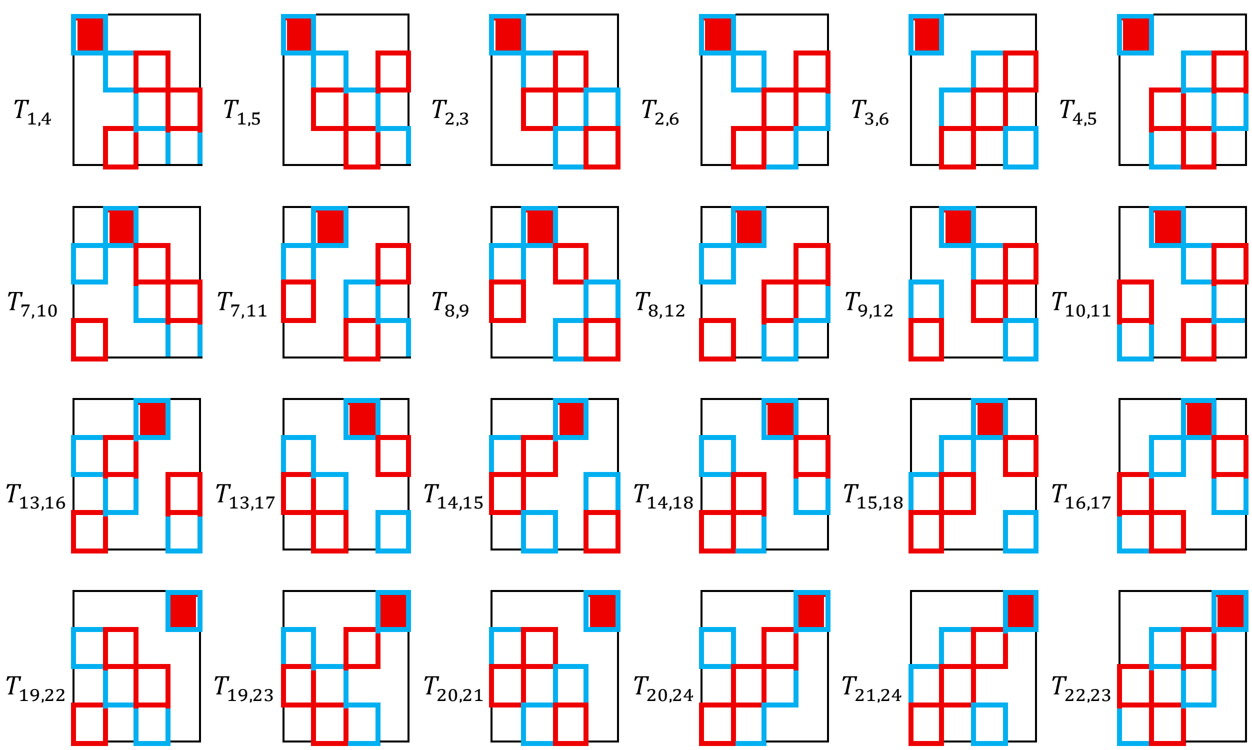
Figura 3.1

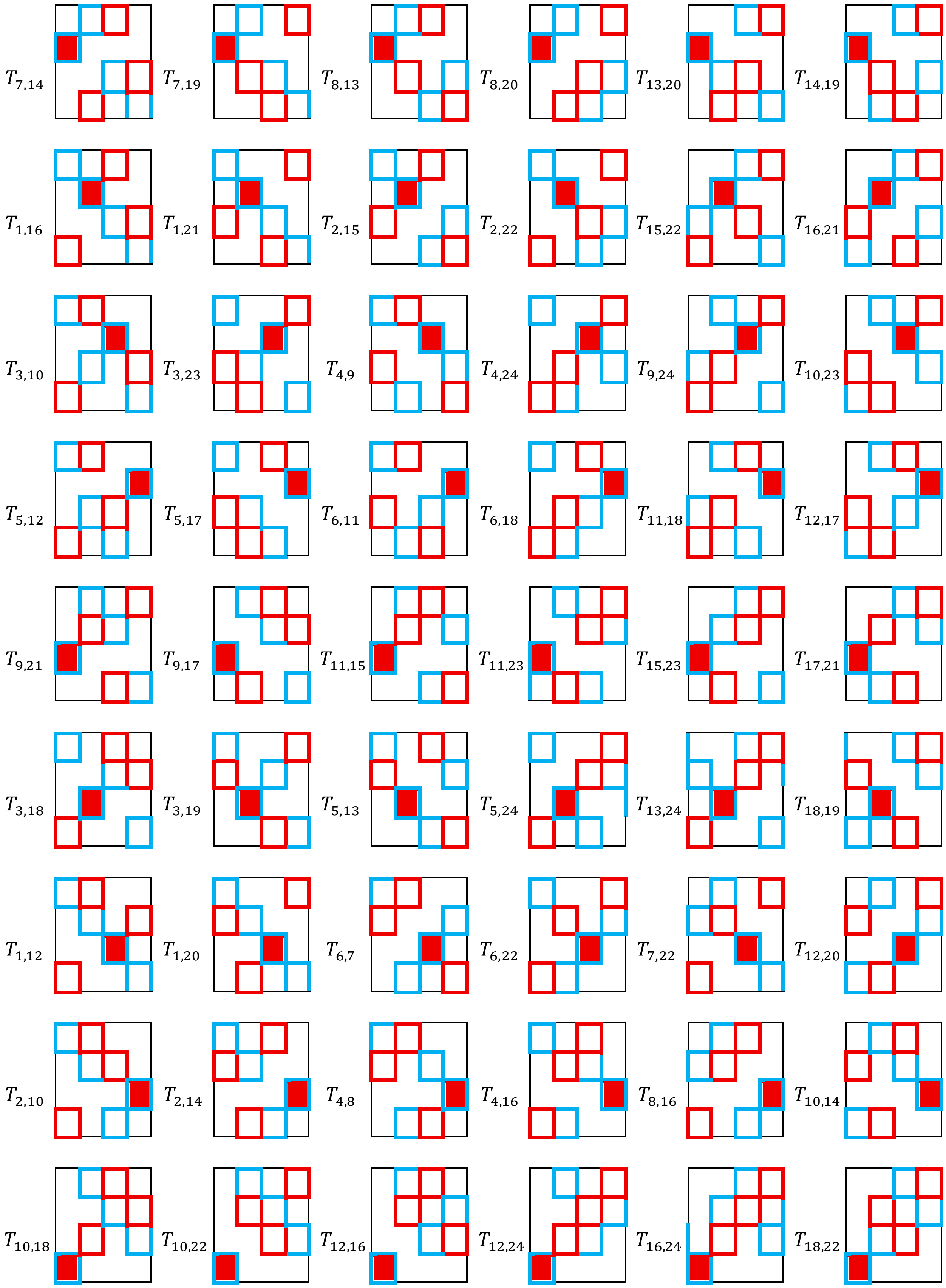
Corolarul 3.2.2. *Orice pătrat latin de ordinul patru posedă exact 576 de transversale (obișnuite).*

Demonstrație. Celulele fiecăreia dintre cele 24 de transversale libere ale unui pătrat latin de ordinul 4 pot fi completate în câte 4! moduri cu elementele mulțimii pe care este definit acest pătrat latin. □

Propoziția 3.2.3. *În orice pătrat latin de ordinul patru există exact 96 de perechi de transversale libere care se intersectează exact într-o celulă.*

Demonstrație. Cele 96 de perechi de transversale libere care se intersectează într-o singură celulă ale unui pătrat latin L de ordinul 4 se obțin analizând cele 24 de transversale libere ale pătratului latin L. Perechile de transversale sunt indicate mai jos, în Figura 3.2. Notația $T_{i,j}$ se referă la perechea de transversale (T_i, T_j), unde transversalele T_i și T_j sunt date în Figura 3.1.




$T_{7,14}$ $T_{7,19}$ $T_{8,13}$ $T_{8,20}$ $T_{13,20}$ $T_{14,19}$
$T_{1,16}$ $T_{1,21}$ $T_{2,15}$ $T_{2,22}$ $T_{15,22}$ $T_{16,21}$
$T_{3,10}$ $T_{3,23}$ $T_{4,9}$ $T_{4,24}$ $T_{9,24}$ $T_{10,23}$
$T_{5,12}$ $T_{5,17}$ $T_{6,11}$ $T_{6,18}$ $T_{11,18}$ $T_{12,17}$
$T_{9,21}$ $T_{9,17}$ $T_{11,15}$ $T_{11,23}$ $T_{15,23}$ $T_{17,21}$
$T_{3,18}$ $T_{3,19}$ $T_{5,13}$ $T_{5,24}$ $T_{13,24}$ $T_{18,19}$
$T_{1,12}$ $T_{1,20}$ $T_{6,7}$ $T_{6,22}$ $T_{7,22}$ $T_{12,20}$
$T_{2,10}$ $T_{2,14}$ $T_{4,8}$ $T_{4,16}$ $T_{8,16}$ $T_{10,14}$
$T_{10,18}$ $T_{10,22}$ $T_{12,16}$ $T_{12,24}$ $T_{16,24}$ $T_{18,22}$

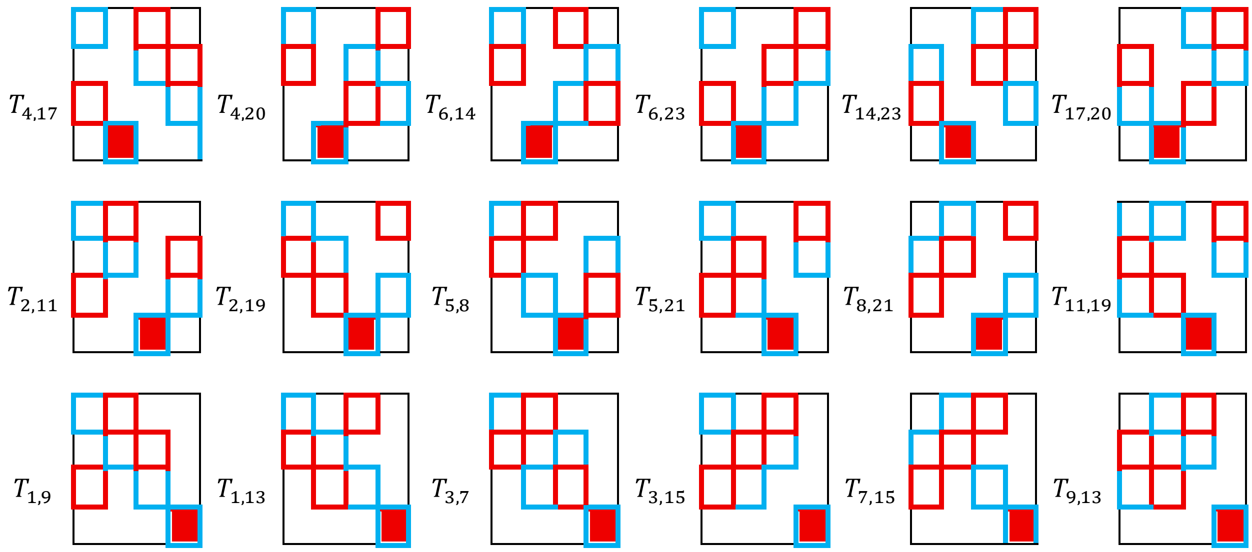


Figura 3.2

□

Corolarul 3.2.3. *În orice pătrat latin de ordinul patru există exact 13824 de perechi de transversale obișnuite care se intersectează exact într-o celulă.*

Demonstrație. Fixând una din două transversale, putem completa celulele ei în 4! moduri. Atunci celulele trasnversalei a 2-a (care se intersectează cu prima exact într-o celulă) pot fi completate în 3! moduri. Prin urmare, există în total $96 \cdot 4! \cdot 3! = 13824$ perechi de transversale obișnuite, care au o singură celulă comună. □

Fie $(Q,\cdot)$ un quasigrup finit de ordinul q și fie că tabla Cayley a quasigrupului $(Q,\cdot)$ conține 2 transversale T_1 și T_2, care au o singură celulă comună, aflată la intersecția liniei elementului x cu coloana elementului y. Notăm elementul din celula comună a transversalelor T_1 și T_2 cu a. Considerăm acum mulțimea $Q' = Q \cup \{\xi_1, \xi_2\}$, unde $\xi_1, \xi_2 \notin Q$. Pe mulțimea Q' definim operația $\circ$ în felul următor: completăm celulele, diferite de celula comună, ale unei transversale cu ξ_1, iar ale celeilalte cu ξ_2. Elementele din celulele celor două transversale, cu excepția elementului din celula comună, le transferăm păstrând ordinea lor, în celulele liniei și, respectiv, a coloanei elementelor ξ_1 și ξ_2. Celulele rămase în linia elementului x, coloana elementului y și la intersecția liniilor și a coloanelor elementelor ξ_1 și ξ_2 pot fi completate în mai multe moduri posibile, însă, urmând această metodă, există exact 12 posibilități de prelungire a quasigrupului Q prin adjuncția a două elemente noi și prin utilizarea a 2 transversale care se intersectează exact într-o celulă. Aceste posibilități sunt ilustrate în schemele de mai jos:

I.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1
ξ_2	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a

II.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a
ξ_2	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1

III.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1
ξ_2	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2

IV.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2
ξ_2	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1

V.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2
ξ_2	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a

VI.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a
ξ_2	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2

VII.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2
ξ_2	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1

VIII.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1
ξ_2	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2

IX.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a
ξ_2	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1

X.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1
ξ_2	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a

XI.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a
ξ_2	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2

XII.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2
ξ_2	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a

Figura 3.3

Propoziția 3.2.4. *Șase prelungiri din cele 12 posibile (Cazurile I, IV, VI, VII, X, XI), prin adjuncția a două elemente noi și utilizând două trasversale care se intersectează exact într-o celulă, nu sunt recursiv 1-derivabile.*

Demonstrație. Considerăm pe rând cele 6 cazuri.

Cazul I.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1
ξ_2	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a

Observăm că $\xi_1 \overset{1}{\circ} \xi_1 = \xi_1 \circ (\xi_1 \circ \xi_1) = \xi_1 \circ \xi_2 = \xi_1$ și $\xi_1 \overset{1}{\circ} \xi_2 = \xi_2 \circ (\xi_1 \circ \xi_2) = \xi_2 \circ \xi_1 = \xi_1$, prin urmare, în acest caz $\left(Q', \overset{1}{\circ}\right)$ nu este un quasigrup.

Cazul IV.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2
ξ_2	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1

Avem: $\xi_1 \overset{1}{\circ} \xi_1 = \xi_1 \circ (\xi_1 \circ \xi_1) = \xi_1 \circ \xi_1 = \xi_1$ și $\xi_1 \overset{1}{\circ} \xi_2 = \xi_2 \circ (\xi_1 \circ \xi_2) = \xi_2 \circ \xi_2 = \xi_1$, deci $\overset{1}{\circ}$ nu este operație de quasigrup.

Cazul VI.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a
ξ_2	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2

Deoarece $\xi_2 \overset{1}{\circ} \xi_1 = \xi_1 \circ (\xi_2 \circ \xi_1) = \xi_1 \circ \xi_1 = \xi_2$ și $\xi_2 \overset{1}{\circ} \xi_2 = \xi_2 \circ (\xi_2 \circ \xi_2) = \xi_2 \circ \xi_2 = \xi_2$, operația $\overset{1}{\circ}$ nu este operație de quasigrup.

Cazul VII.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	ξ_2	…	…	ξ_1	a
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_1	…	…	a	ξ_2
ξ_2	…	…	a	…	…	ξ_2	ξ_1

Observăm că $\xi_2 \overset{1}{\circ} \xi_1 = \xi_1 \circ (\xi_2 \circ \xi_1) = \xi_1 \circ \xi_2 = \xi_2$ și $\xi_2 \overset{1}{\circ} \xi_2 = \xi_2 \circ (\xi_2 \circ \xi_2) = \xi_2 \circ \xi_1 = \xi_2$, prin urmare operația $\overset{1}{\circ}$ nu este operație de quasigrup.

Cazul X.

$\circ$	…	…	y_0	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
x_0	…	…	a	…	…	ξ_1	ξ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
ξ_1	…	…	ξ_2	…	…	a	ξ_1
ξ_2	…	…	ξ_1	…	…	ξ_2	a

Pentru această construcție avem:

$$x_0 \overset{1}{\circ} \xi_1 = \xi_1 \circ (x_0 \circ \xi_1) = \xi_1 \circ \xi_1 = a \text{ și } x_0 \overset{1}{\circ} \xi_2 = \xi_2 \circ (x_0 \circ \xi_2) = \xi_2 \circ \xi_2 = a$$

prin urmare, operația $\overset{1}{\circ}$ nu este operație de quasigrup.

Cazul XI.

$\circ$	...	...	y_0	...	...	ξ_1	ξ_2
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
x_0	...	...	a	...	...	ξ_2	ξ_1
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
ξ_1	...	...	ξ_2	...	...	ξ_1	a
ξ_2	...	...	ξ_1	...	...	a	ξ_2

Observăm că $x_0 \overset{1}{\circ} \xi_1 = \xi_1 \circ (x_0 \circ \xi_1) = \xi_1 \circ \xi_2 = a$ și $x_0 \overset{1}{\circ} \xi_2 = \xi_2 \circ (x_0 \circ \xi_2) = \xi_2 \circ \xi_1 = a$, deci $\left(Q', \overset{1}{\circ}\right)$ nu este un quasigrup.

Problema 3.2.1. *Pot oare prelungirile unui quasigrup recursiv 1-derivabil, obținute prin utilizarea a două trasversale care se intersectează exact într-o celulă, să fie recursiv 1-derivabile?*

Conform Propoziției 3.2.4, pentru soluționarea Problemei 3.2.1 este suficient de cercetat doar șase modalități de astfel de prelungiri (cazurile II, III, V, VIII, IX, XII) . În paragraful următor vom cerceta derivabilitatea recursivă a prelungirilor de acest tip a quasigrupurilor de ordinul 5.

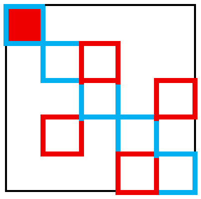
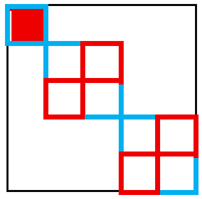
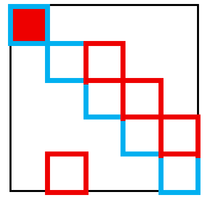
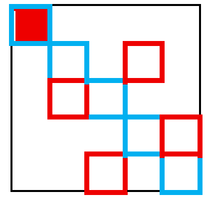
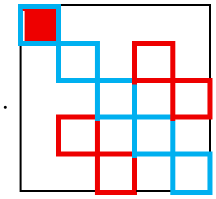
3.3. Prelungirea quasigrupurilor de ordinul cinci prin utilizarea a două transversale care se intersectează într-o singură celulă

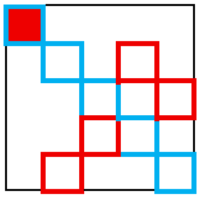
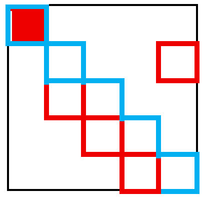
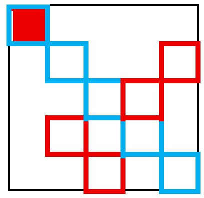
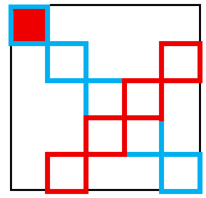
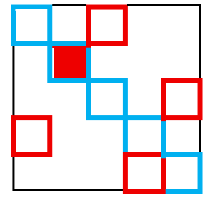
Considerăm prelungirile quasigrupurilor finite, de ordinul 5, prin metoda propusă în paragraful precedent, deci prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o singură celulă.

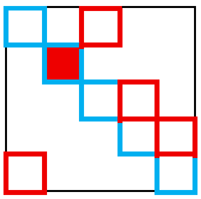
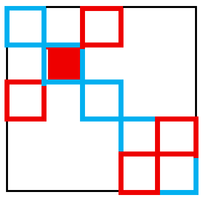
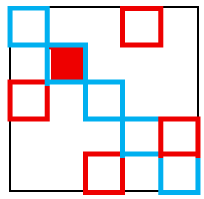
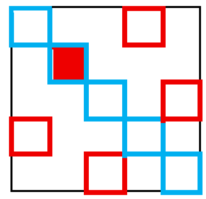
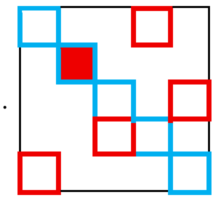
Pentru aceasta evaluăm toate cazurile posibile de intersecţie într-un punct a 2 transversale, una pe diagonala principală, iar alta arbitrară. Arătăm cu ajutorul schemelor acest lucru.

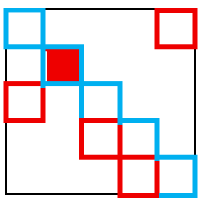
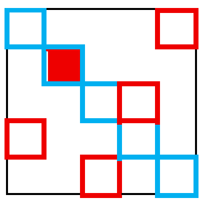
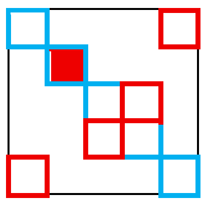
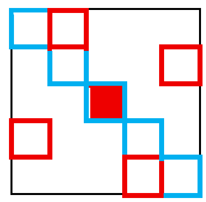
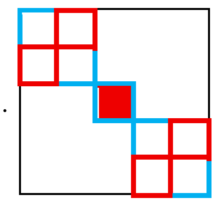
Propoziția 3.3.1. *Într-un pătrat latin L de ordinul 5 există 45 de perechi de trasversale libere, una din ele fiind diagonala principală a lui L, fiecare pereche de transversale având câte o singură celulă comună.*

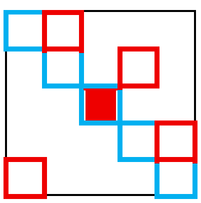
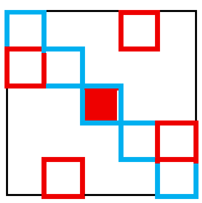
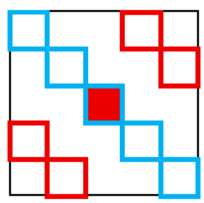
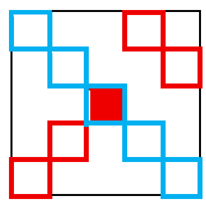
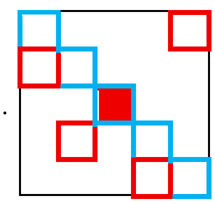
Demonstrație. Fie T transversala liberă aflată pe diagonala principală (marcată în albastru) a lui L. Atunci există următoarele 45 de configurații posibile pentru cea de-a 2 trasversală liberă (marcată în roșu), care are o singură celulă comună (colorată în roșu) cu T:

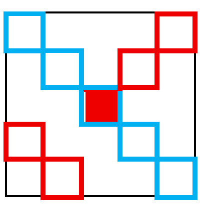
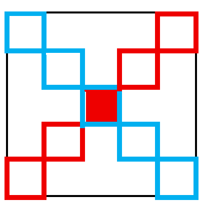
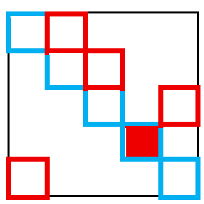
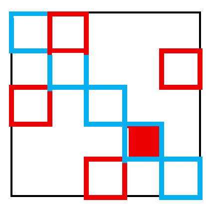
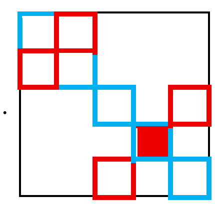
1.  2.  3.  4.  5. 

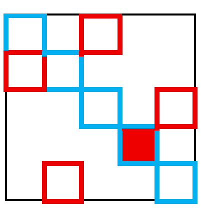
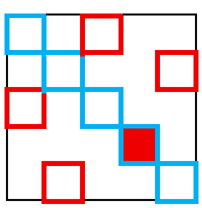
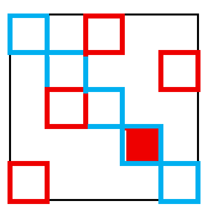
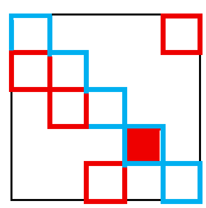
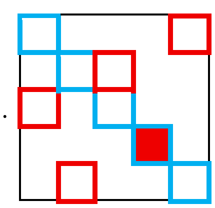
6.  7.  8.  9.  10. 

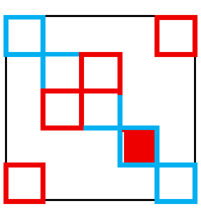
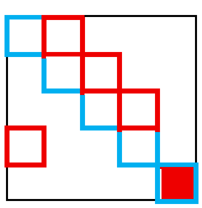
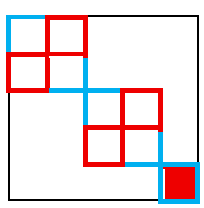
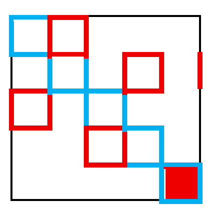
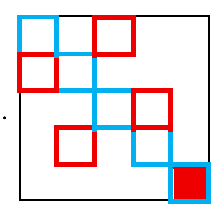
11.  12.  13.  14.  15. 

16.  17.  18.  19.  20. 

21.  22.  23.  24.  25. 

26.  27.  28.  29.  30. 

31.  32.  33.  34.  35. 

36.  37.  38.  39.  40. 

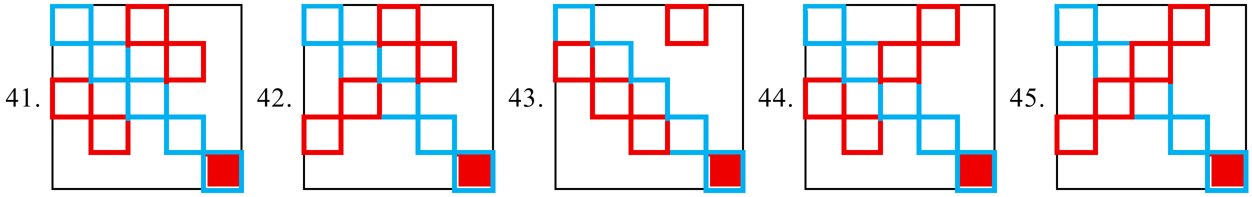


Figura 3.4

Propoziția 3.3.2. *Există exact 48 de pătrate latine de ordinul 5, care posedă 2 transversale ce se intersectează îtr-o singură celulă, una din aceste transversale fiind diagonala principală, cu ordinea fixată a elementelor.*

Demonstrație. Notăm cu S cea de-a doua transversală, iar cu T transversala de pe diagonala principală. Fie că ordinea elementelor în celulele $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)$ ale transversalei T este, respectiv, $1, 2, 3, 4, 5$. Sunt considerate toate cazurile posibile pentru a doua transversală S, astfel încât S și T să aibă o singură celulă comună. Obținem că există exact 48 de pătrate latine diferite, de ordinul 5, care posedă transversala T pe diagonala principală. Aceste pătrate latine sunt prezentate mai jos, în Figura 3.5, unde cu "$*$" sunt menționate pătratele latine care corespund quasigrupurilor recursiv 1-derivabile.

$L_1{}^*$

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

$L_2{}^*$

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

$L_3{}^*$

1	5	4	3	2
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
5	3	2	4	1
3	4	1	2	5

$L_4{}^*$

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

L_5

1	4	5	2	3
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

L_6

1	3	2	5	4
5	2	4	1	3
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	4	1	3	5

$L_7{}^*$

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

$L_8{}^*$

1	3	2	5	4
5	2	4	3	1
4	5	3	1	2
2	1	5	4	3
3	4	1	2	5

$L_9{}^*$

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

$L_{10}{}^*$

1	3	2	5	4
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1
3	5	1	4	2
2	1	4	3	5

L_{11}

1	5	4	3	2
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

L_{12}

1	3	2	5	4
4	2	5	3	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
3	1	4	2	5

$L_{13}{}^*$

1	4	5	2	3
5	2	4	3	1
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
4	3	2	1	5

$L_{14}{}^*$

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

$L_{15}{}^*$

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

L_{16}^{*}

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

L_{17}^{*}

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

L_{18}^{*}

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

L_{19}

1	4	5	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

L_{20}^{*}

1	4	5	2	3
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2
5	3	2	4	1
2	1	4	3	5

L_{21}^{*}

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

L_{22}

1	5	4	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

L_{23}^{*}

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

L_{24}^{*}

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

L_{25}

1	3	4	5	2
4	2	5	1	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

L_{26}

1	5	4	2	3
3	2	1	5	4
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
4	1	2	3	5

L_{27}

1	4	5	3	2
3	2	1	5	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	3	4	1	5

L_{28}

1	3	5	2	4
5	2	4	3	1
4	1	3	5	2
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

L_{29}

1	5	2	3	4
4	2	5	1	3
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

L_{30}

1	4	2	5	3
5	2	4	3	1
2	5	3	1	4
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

L_{31}

1	4	5	3	2
5	2	4	1	3
2	1	3	5	4
3	5	2	4	1
4	3	1	2	5

L_{32}

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

L_{33}

1	5	4	2	3
4	2	5	3	1
2	1	3	5	4
5	3	1	4	2
3	4	2	1	5

L_{34}

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

L_{35}

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
4	5	3	1	2
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

L_{36}

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
5	4	3	2	1
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

L_{37}

1	3	4	5	2
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
2	1	5	4	3
3	4	2	1	5

L_{38}

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	5	1	4	2
4	1	2	3	5

L_{39}

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
4	1	3	5	2
5	3	2	4	1
2	4	1	3	5

L_{40}

1	5	2	3	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	1	5	4	3
4	3	1	2	5

L_{41}

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
3	5	1	4	2
2	3	4	1	5

L_{42}

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
2	5	3	1	4
5	3	2	4	1
3	1	4	2	5

L_{43}

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
3	4	1	2	5

L_{44}

1	3	5	2	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
3	5	2	4	1
2	1	4	3	5

L_{45}

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
4	3	2	1	5

L_{46}

1	4	2	5	3
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	3	1	4	2
2	1	4	3	5

L_{47}

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	1	2	5

L_{48}

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	2	1	5

Figura 3.5

Cele 240 de perechi de transversale (T, S), ce se intersectează într-o singură celulă, care există în pătratele latine $L_1 - L_{48}$, sunt date în Figura 3.6. Menționăm că unele transversale S conțin același set de celule, însă ordinea elementelor în aceste celule e diferită, deci prelungirile construite cu aceste 240 de perechi de transversale vor fi diferite două câte două.

1.1.*

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

1.2.*

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

1.3.*

1	5	4	3	2
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
5	3	2	4	1
3	4	1	2	5

1.4.*

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

2.1.

1	4	5	2	3
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

2.2.

1	3	2	5	4
5	2	4	1	3
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	4	1	3	5

2.3.*

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

2.4.*

1	3	2	5	4
5	2	4	3	1
4	5	3	1	2
2	1	5	4	3
3	4	1	2	5

2.5.*

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

2.6.*

1	3	2	5	4
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1
3	5	1	4	2
2	1	4	3	5

2.7.

1	5	4	3	2
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

2.8.

1	3	2	5	4
4	2	5	3	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
3	1	4	2	5

3.1.*

1	4	5	2	3
5	2	4	3	1
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
4	3	2	1	5

3.2.*

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

3.3.*

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

3.4.*

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

4.1.*

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

4.2.*

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

4.3*

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

4.4.*

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

5.1.

1	4	5	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

5.2.

1	3	2	5	4
4	2	5	3	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
3	1	4	2	5

5.3.*

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

5.4*

1	4	5	2	3
5	2	4	3	1
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
4	3	2	1	5

5.5.*

1	4	5	2	3
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2
5	3	2	4	1
2	1	4	3	5

5.6.*

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

5.7.

1	5	4	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

5.8.

1	4	5	2	3
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

6.1*

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

6.2*

1	3	2	5	4
5	2	4	3	1
4	5	3	1	2
2	1	5	4	3
3	4	1	2	5

6.3.*

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

6.4.*

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

7.1.*

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

7.2.*

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

7.3.*

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

7.4.*

1	4	5	2	3
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2
5	3	2	4	1
2	1	4	3	5

8.1.*

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

8.2*

1	3	2	5	4
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1
3	5	1	4	2
2	1	4	3	5

8.3.*

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

8.4.*

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

9.1.

1	5	4	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

9.2.

1	3	2	5	4
5	2	4	1	3
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	4	1	3	5

9.3.*

1	5	4	3	2
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
5	3	2	4	1
3	4	1	2	5

9.4.*

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

9.5.*

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

9.6.*

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

9.7.

1	5	4	3	2
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

9.8.

1	4	5	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

10.1.*

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

10.2.*

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

10.3.*

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

10.4.*

1	4	5	2	3
5	2	4	3	1
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
4	3	2	1	5

11.1.*

1	5	4	3	2
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
5	3	2	4	1
3	4	1	2	5

11.2.*

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

11.3.*

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

11.4.*

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

12.1.

1	3	4	5	2
4	2	5	1	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

12.2.

1	5	4	2	3
3	2	1	5	4
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
4	1	2	3	5

12.3.*

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

12.4.*

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

12.5.*

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

12.6.*

1	4	5	2	3
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2
5	3	2	4	1
2	1	4	3	5

12.7.

1	4	5	3	2
3	2	1	5	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	3	4	1	5

12.8.

1	3	5	2	4
5	2	4	3	1
4	1	3	5	2
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

13.1.*

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

13.2.*

1	3	2	5	4
5	2	4	3	1
4	5	3	1	2
2	1	5	4	3
3	4	1	2	5

13.3.*

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

13.4.*

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

14.1.

1	4	5	3	2
3	2	1	5	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	3	4	1	5

14.2.

1	5	2	3	4
4	2	5	1	3
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

14.3.*

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

14.4.*

1	5	4	3	2
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
5	3	2	4	1
3	4	1	2	5

14.5.*

1	3	2	5	4
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1
3	5	1	4	2
2	1	4	3	5

14.6.*

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

14.7.

1	3	4	5	2
4	2	5	1	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

14.8.

1	4	2	5	3
5	2	4	3	1
2	5	3	1	4
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

15.1.*

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

15.2.*

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

15.3.*

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

15.4.*

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

16.1.*

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

16.2.*

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

16.3.*

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

16.4.*

1	3	2	5	4
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1
3	5	1	4	2
2	1	4	3	5

17.1.*

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

17.2.*

1	4	5	2	3
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2
5	3	2	4	1
2	1	4	3	5

17.3.*

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

17.4.*

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

18.1.

1	4	2	5	3
5	2	4	3	1
2	5	3	1	4
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

18.2.

1	5	4	2	3
3	2	1	5	4
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
4	1	2	3	5

18.3.*

1	4	5	2	3
5	2	4	3	1
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
4	3	2	1	5

18.4.*

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

18.5.*

1	3	2	5	4
5	2	4	3	1
4	5	3	1	2
2	1	5	4	3
3	4	1	2	5

18.6.*

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

18.7

1	3	5	2	4
5	2	4	3	1
4	1	3	5	2
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

18.8.

1	5	2	3	4
4	2	5	1	3
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

19.1*

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

19.2*

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

19.3*

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

19.4.*

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

20.1.

1	4	5	3	2
5	2	4	1	3
2	1	3	5	4
3	5	2	4	1
4	3	1	2	5

20.2.

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

20.3.*

1	4	5	2	3
5	2	4	3	1
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
4	3	2	1	5

20.4.*

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

20.5.*

1	5	4	3	2
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
5	3	2	4	1
3	4	1	2	5

20.6.*

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

20.7.

1	5	4	2	3
4	2	5	3	1
2	1	3	5	4
5	3	1	4	2
3	4	2	1	5

20.8.

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

21.1.*

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

21.2.*

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

21.3.*

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

21.4.*

1	4	5	2	3
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2
5	3	2	4	1
2	1	4	3	5

22.1.*

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

22.2.*

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

22.3.*

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

22.4.*

1	3	2	5	4
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1
3	5	1	4	2
2	1	4	3	5

23.1.

1	5	4	2	3
4	2	5	3	1
2	1	3	5	4
5	3	1	4	2
3	4	2	1	5

23.2.

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
4	5	3	1	2
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

23.3.*

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

23.4.*

1	4	5	2	3
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2
5	3	2	4	1
2	1	4	3	5

23.5.*

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

23.6.*

1	3	2	5	4
5	2	4	3	1
4	5	3	1	2
2	1	5	4	3
3	4	1	2	5

23.7.

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

23.8.

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
5	4	3	2	1
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

24.1.*

1	4	5	2	3
5	2	4	3	1
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
4	3	2	1	5

24.2.*

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

24.3.*

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

24.4.*

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

25.1.*

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

25.2.*

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

25.3.*

1	3	2	5	4
5	2	4	3	1
4	5	3	1	2
2	1	5	4	3
3	4	1	2	5

25.4.*

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

26.1.*

1	5	4	3	2
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
5	3	2	4	1
3	4	1	2	5

26.2.*

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

26.3.*

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

26.4.*

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

27.1.

1	4	5	3	2
5	2	4	1	3
2	1	3	5	4
3	5	2	4	1
4	3	1	2	5

27.2.

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
5	4	3	2	1
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

27.3.*

1	3	2	5	4
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1
3	5	1	4	2
2	1	4	3	5

27.4.*

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

27.5.*

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

27.6.*

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

27.7.

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
4	5	3	1	2
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

27.8.

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

28.1.*

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

28.2.*

1	3	2	5	4
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1
3	5	1	4	2
2	1	4	3	5

28.3.*

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

28.4.*

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

29.1.*

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

29.2.*

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

29.3.*

1	5	4	3	2
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
5	3	2	4	1
3	4	1	2	5

29.4.*

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

30.1.

1	3	4	5	2
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
2	1	5	4	3
3	4	2	1	5

30.2.

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	5	1	4	2
4	1	2	3	5

30.3.*

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

30.4.*

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

30.5.*

1	3	2	5	4
5	2	4	3	1
4	5	3	1	2
2	1	5	4	3
3	4	1	2	5

30.6.*

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

30.7.

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
4	1	3	5	2
5	3	2	4	1
2	4	1	3	5

30.8.

1	5	2	3	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	1	5	4	3
4	3	1	2	5

31.1.*

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

31.2.*

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

31.3.*

1	4	5	2	3
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2
5	3	2	4	1
2	1	4	3	5

31.4.*

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

32.1.

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
3	5	1	4	2
2	3	4	1	5

32.2.

1	5	2	3	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	1	5	4	3
4	3	1	2	5

32.3.*

1	3	2	5	4
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1
3	5	1	4	2
2	1	4	3	5

32.4.*

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

32.5.*

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

32.6.*

1	4	5	2	3
5	2	4	3	1
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
4	3	2	1	5

32.7.

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
2	5	3	1	4
5	3	2	4	1
3	1	4	2	5

32.8.

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	5	1	4	2
4	1	2	3	5

33.1.*

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

33.2.*

1	3	2	5	4
5	2	4	3	1
4	5	3	1	2
2	1	5	4	3
3	4	1	2	5

33.3.*

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

33.4.*

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

34.1.*

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

34.2.*

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	4	1	2	5

34.3.*

1	4	5	2	3
5	2	4	3	1
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
4	3	2	1	5

34.4.*

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

35.1.*

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

35.2.*

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

35.3.*

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

35.4.*

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

36.1.

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
2	5	3	1	4
5	3	2	4	1
3	1	4	2	5

36.2.

1	3	4	5	2
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
2	1	5	4	3
3	4	2	1	5

36.3.*

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

36.4.*

1	5	4	3	2
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
5	3	2	4	1
3	4	1	2	5

36.5.*

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

36.6.*

1	4	5	2	3
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2
5	3	2	4	1
2	1	4	3	5

36.7.

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
3	5	1	4	2
2	3	4	1	5

36.8.

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
4	1	3	5	2
5	3	2	4	1
2	4	1	3	5

37.1.*

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

37.2.*

1	3	2	5	4
5	2	4	3	1
4	5	3	1	2
2	1	5	4	3
3	4	1	2	5

37.3.*

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

37.4.*

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

38.1.

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
3	4	1	2	5

38.2.

1	3	5	2	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
3	5	2	4	1
2	1	4	3	5

38.3.*

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

38.4.*

1	3	2	5	4
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1
3	5	1	4	2
2	1	4	3	5

38.5.*

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

38.6.*

1	4	5	2	3
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2
5	3	2	4	1
2	1	4	3	5

38.7.

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
4	3	2	1	5

38.8.

1	4	2	5	3
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	3	1	4	2
2	1	4	3	5

39.1.*

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

39.2.*

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

39.3.*

1	4	5	2	3
5	2	4	3	1
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
4	3	2	1	5

39.4.*

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

40.1.*

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

40.2.*

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

40.3.*

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

40.4.*

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	1	2	4	3
2	4	1	3	5

41.1.

1	4	2	5	3
3	2	5	1	4
4	5	3	2	1
5	3	1	4	2
2	1	4	3	5

41.2.

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	1	2	5

41.3*

1	4	2	5	3
5	2	1	3	4
4	5	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

41.4.*

1	3	2	5	4
5	2	4	3	1
4	5	3	1	2
2	1	5	4	3
3	4	1	2	5

41.5.*

1	5	4	3	2
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
5	3	2	4	1
3	4	1	2	5

41.6.*

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

41.7.

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
3	4	1	2	5

41.8.

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	2	1	5

42.1.*

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

42.2.*

1	3	2	5	4
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1
3	5	1	4	2
2	1	4	3	5

42.3.*

1	3	4	5	2
4	2	5	3	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
3	4	2	1	5

42.4.*

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

43.1.*

1	5	4	2	3
3	2	5	1	4
2	4	3	5	1
5	3	1	4	2
4	1	2	3	5

43.2.*

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

43.3.*

1	5	4	3	2
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
5	3	2	4	1
3	4	1	2	5

43.4.*

1	4	5	3	2
4	2	1	5	3
5	1	3	2	4
3	5	2	4	1
2	3	4	1	5

44.1.*

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	2	1	5

44.2.*

1	4	5	2	3
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2
5	3	2	4	1
2	1	4	3	5

44.3.*

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

44.4.*

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

45.1.

1	5	4	2	3
5	2	1	3	4
2	4	3	5	1
3	1	5	4	2
4	3	2	1	5

45.2.

1	3	5	2	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
3	5	2	4	1
2	1	4	3	5

45.3.*

1	4	5	2	3
5	2	4	3	1
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
4	3	2	1	5

45.4.*

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

45.5.*

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

45.6.*

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	1	2
2	3	5	4	1
3	1	4	2	5

45.7.

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
5	1	3	2	4
2	5	1	4	3
4	3	2	1	5

45.8.

1	5	2	3	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
2	3	5	4	1
3	4	1	2	5

Figura 3.6

În Anexa 1 sunt prezentate cele 240 de perechi de transversale (T, S), ce se intersectează într-o singură celulă, pentru cazul când ordinea elementelor pe diagonala principală T este 2,3,4,5,1.

Propoziția 3.3.3. *Prelungirile pătratelor latine de ordinul 5, prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două transversale, cu o singură celulă comună, dintre care una din transversale este pe diagonala principală și are fixată ordinea elementelor 1,2,3,4,5 sau 2,3,4,5,1, nu sunt recursiv 1-derivabile.*

Demonstrație. Demonstrația se obține prin calcul direct. Pentru pătratele latine cu fiecare dintre cele 240 de perechi de transversale (pentru o ordine fixată a elementelor în celulele transversalei T), au fost luate în considerare 6 tipuri de prelungiri conform schemelor de prelungire II, III, V, VIII, IX, XII date în Figura 3.3.

Pentru o viziune mai clară asupra calculelor efectuate, prezentăm un exemplu concret. Considerăm pătratul latin 2.3.*, de ordinul 5, cu ordinea fixată a elementelor 1,2,3,4,5 pe diagonala principală, dat în Figura 3.5:

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	4	5	3	2
2	3	2	4	5	1
3	2	5	3	1	4
4	5	1	2	4	3
5	4	3	1	2	5

Tabelul 3.5

unde transversala T este pe diagonala principală,

$$T = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\},$$

iar transversala

$$S = \{(1,1), (2,3), (3,2), (4,5), (5,4)\}$$

se intersectează cu T în celula $(1,1)$. Mai întâi de toate verificăm dacă quasigrupul dat în Tabelul 3.5 este recursiv 1-derivabil. Răspunsul este afirmativ, derivata sa recursivă de ordinul 1 fiind dată de tabla:

$\overset{1}{\cdot}$	1	2	3	4	5
1	1	5	4	2	3
2	5	2	1	3	4
3	4	1	3	5	2
4	2	3	5	4	1
5	3	4	2	1	5

La pasul următor construim cele 6 prelungiri ale quasigrupul dat în Tabelul 3.5, utilizând schemele de extensie II, III, V, VIII, IX, XII, conform Figurii 3.3.
Prezentăm mai jos în p. a)-f) quasigrupurile de ordinul 7 obținute în acest mod.

a) *Schema de extensie II*.

Prelungim quasigrupul dat în Tabelul 3.5 utilizând schema de prelungire II. Adăugând două elemente noi ξ_1 și ξ_2, obținem următorul tabel al prelungirii:

$\circ$	1	2	3	4	5	ξ_1	ξ_2
1	ξ_1	4	5	3	2	1	ξ_2
2	3	ξ_1	ξ_2	5	1	2	4
3	2	ξ_2	ξ_1	1	4	3	5
4	5	1	2	ξ_1	ξ_2	4	3
5	4	3	1	ξ_2	ξ_1	5	2
ξ_1	ξ_2	5	4	2	3	ξ_1	1
ξ_2	1	2	3	4	5	ξ_2	ξ_1

Observăm că această prelungire nu este recursiv 1-derivabilă.

b) *Schema de extensie III*.

Prelungim quasigrupul dat în Tabelul 3.5 utilizând schema de prelungire III. Adăugăm două elemente noi ξ_1 și ξ_2 și obținem următorul pătrat latin de ordinul 7:

$\circ$	1	2	3	4	5	ξ_1	ξ_2
1	ξ_1	4	5	3	2	ξ_2	1
2	3	ξ_1	ξ_2	5	1	4	2
3	2	ξ_2	ξ_1	1	4	5	3
4	5	1	2	ξ_1	ξ_2	3	4
5	4	3	1	ξ_2	ξ_1	2	5
ξ_1	ξ_2	5	4	2	3	1	ξ_1
ξ_2	1	2	3	4	5	ξ_1	ξ_2

Prin verificare directă obținem că prelungirea dată nu este recursiv 1-derivabilă.

c) *Schema de extensie V*.

Prelungim quasigrupul dat în Tabelul 3.5 utilizând schema de prelungire V. Adăugăm două elemente noi ξ_1 și ξ_2 și obținem următorul pătrat latin de ordinul 7:

$\circ$	1	2	3	4	5	ξ_1	ξ_2
1	ξ_2	4	5	3	2	1	ξ_1
2	3	ξ_1	ξ_2	5	1	4	2
3	2	ξ_2	ξ_1	1	4	5	3
4	5	1	2	ξ_1	ξ_2	3	4
5	4	3	1	ξ_2	ξ_1	2	5
ξ_1	1	5	4	2	3	ξ_1	ξ_2
ξ_2	ξ_1	2	3	4	5	ξ_2	1

Nici prelungirea dată nu este recursiv 1-derivabilă.

d) *Schema de extensie VIII.*

Prelungim quasigrupul dat în Tabelul 3.5 utilizând schema de prelungire VIII. Adăugăm două elemente noi ξ_1 și ξ_2 și obținem următorul pătrat latin de ordinul 7:

$\circ$	1	2	3	4	5	ξ_1	ξ_2
1	ξ_2	4	5	3	2	ξ_1	1
2	3	ξ_1	ξ_2	5	1	2	4
3	2	ξ_2	ξ_1	1	4	3	5
4	5	1	2	ξ_1	ξ_2	4	3
5	4	3	1	ξ_2	ξ_1	5	2
ξ_1	1	5	4	2	3	ξ_2	ξ_1
ξ_2	ξ_1	2	3	4	5	1	ξ_2

Prelungirea dată nu este recursiv 1-derivabilă.

e) *Schema de extensie IX.*

Prelungim quasigrupul dat în Tabelul 3.5 utilizând schema de prelungire IX. Adăugăm două elemente noi ξ_1 și ξ_2 și obținem următorul pătrat latin de ordinul 7:

$\circ$	1	2	3	4	5	ξ_1	ξ_2
1	1	4	5	3	2	ξ_1	ξ_2
2	3	ξ_1	ξ_2	5	1	2	4
3	2	ξ_2	ξ_1	1	4	3	5
4	5	1	2	ξ_1	ξ_2	4	3
5	4	3	1	ξ_2	ξ_1	5	2
ξ_1	ξ_1	2	3	4	5	ξ_2	1
ξ_2	ξ_2	5	4	2	3	1	ξ_1

Nici prelungirea dată nu este recursiv 1-derivabilă.

f) *Schema de extensie XII*.

Prelungim quasigrupul dat în Tabelul 3.5 utilizând schema de prelungire XII. Adăugăm două elemente noi ξ_1 și ξ_2 și obținem următorul pătrat latin de ordinul 7:

$\circ$	1	2	3	4	5	ξ_1	ξ_2
1	1	4	5	3	2	ξ_2	ξ_1
2	3	ξ_1	ξ_2	5	1	4	2
3	2	ξ_2	ξ_1	1	4	5	3
4	5	1	2	ξ_1	ξ_2	3	4
5	4	3	1	ξ_2	ξ_1	2	5
ξ_1	ξ_1	2	3	4	5	1	ξ_2
ξ_2	ξ_2	5	4	2	3	ξ_1	1

Prelungirea dată nu este recursiv 1-derivabilă.

Astfel în nici unul din aceste cazuri nu s-a obținut o prelungire recursiv 1-derivabilă. Analog se efectuează verificarea și pentru celelalte 239 perechi (T,S) de transversale. □

3.4. Concluzii la Capitolul 3

Capitolul 3 este dedicat analizei posibilității de prelungire (extindere) a unui quasigrup finit prin adjuncție de noi elemente și redefinirea operației, cât și studiului derivabilității recursive a prelungirilor.

În Paragraful 3.1 sunt determinate condiţiile necesare şi suficiente pentru ca prelungirile quasigrupurilor binare finite, obţinute utilizând construcţiile Bruck și, respectiv Belousov, să fie recursiv 1-derivabile (Teoremele 3.1.1 și 3.1.2).

În Paragraful 3.2 este propusă o metodă de construcție a prelungirilor unui quasigrup finit prin utilizarea a două trasversale (ale tablei Cayley a quasigrupului) care se intersectează într-un singur punct (prezentată grafic în Figura 3.3). Este analizată existența unor astfel de perechi de transversale. Se arată că: a) Un pătrat latin de ordinul n poate avea cel mult $n-2$ transversale care se intersectează într-un singur punct, fiind disjuncte două câte două în celelalte puncte (Propoziția 3.2.1); b) În orice pătrat latin de ordinul patru există exact 96 de perechi de transversale libere, și respectiv 13824 de perechi de transversale obișnuite, care se intersectează exact într-o celulă (Propoziția 3.2.3; Corolarul 3.2.3).

De asemenea, in acest paragraf este analizată derivabilitatea recursivă a prelungirilor, obținute prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două trasversale care se intersectează exact într-o celulă (Propoziția 3.2.4, Problema 3.2.1).

În ultimul paragraf al Capitolului 3 sunt studiate prelungirile quasigrupurilor finite de ordinul 5 (pătratelor latine de ordinul 5), prin metoda propusă, deci prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o singură celulă. Se demonstrează că există exact 48 de pătrate latine diferite de ordinul 5, care posedă 2 transversale, dintre care una este diagonala principală T (cu ordinea fixată a elementelor), iar a doua are o singură celulă comună cu T (Propoziția 3.3.2). În Anexa 1 sunt prezentate 240 de perechi de transversale corespunzătoare celor 48 de pătrate latine diferite.

Problema 1-derivabilității recursive a prelungirilor quasigrupurilor de ordinul 5, prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două transversale ce se intersectează exact într-un punct, una dintre care este diagonala principală T, este soluționată (negativ), în cazul când ordinea elementelor în transversala T este 1, 2, 3, 4, 5 sau 2, 3, 4, 5, 1 (Propoziția 3.3.3).

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Lucrarea se referă la teoria quasigrupurilor binare și n-are recursiv derivabile, metode de prelungire (extindere) a quasigrupurilor finite și studiul derivabilității recursive a prelungirilor.

Problema principală ştiinţifică soluţionată constă în demonstrarea unui criteriu de derivabilitate recursivă de ordin arbitrar finit a unei clase de grupuri n-are, în prezentarea unei metode noi de prelungire a quasigrupurilor binare finite prin utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o celulă și caracterizarea derivabilității recursive a acestor prelungiri.

În teză sunt date caracterizări ale derivabilității recursive a quasigrupurilor binare și n-are, inclusiv a prelungirilor quasigrupurilor, sunt date estimări ale ordinului maximal de derivabilitate recursivă și a spectrului quasigrupurilor recursiv derivabile finite.

În lucrare sunt determinate criterii ale derivabilității recursive de ordin $r \geq 1$ ale quasigrupurilor binare și n-are, este data o metodă nouă de prelungire a quasigrupurilor binare finite prin utilizarea a două transversale care se intersectează exact într-o celulă, fiind caracterizat numărul de astfel de perechi de transversale în pătratele latine de ordin ≤ 5. Este demonstrată inexistența pătratelor latine de ordinul 5, recursiv derivabile, prelungirile cărora obținute prin metoda dată, una dintre transversale fiind diagonala principală cu o anumită ordine prestabilită a elementelor, sunt recursiv derivabile.

În cadrul tezei date sunt efectuate cercetări în domeniul teoriei quasigrupurilor recursiv derivabile şi a prelungirilor quasigrupurilor finite (pătratelor latine), iar contribuţia autorului poate fi formulată în următoarele ***concluzii principale***:

1. A fost dat un criteriu de r-derivabilitate recursivă $(r \geq 1)$ a grupului n-ar (Q, B), unde $B(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, $(Q,\cdot)$ fiind un grup abelian binar finit şi $n \geq 2$. Acest rezultat generalizează în caz n-ar criteriul obținut de V. Izbash și P. Syrbu pentru grupurile abeliene finite în [69]. Rezultatele sunt publicate în [117].

2. A fost caracterizată s-derivabilitatea recursivă a quasigrupului $(\mathbb{Z}_n,*)$, unde $x * y = \overline{a}x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}_n$, $(a, n) = 1, s \geq 1$. Acest rezultat permite construcția quasigrupurilor liniare recursiv $(q-2)$-derivabile [117].

3. Au fost determinate toate quasigrupurile recursiv derivabile de ordin ≤ 4, Se arată că există 6 quasigrupuri de ordinul 3 recursiv 1-derivabile, 48 quasigrupuri recursiv 1-derivabile de ordinul 4 și 8 quasigrupuri recursiv 2-derivabile de ordinul 4 (Propozițiile 2.1.4 și 2.1.5).

4. A fost propusă o metodă de construcție a prelungirilor unui quasigrup finit prin adjuncția a două elemente noi și utilizarea a două trasversale (ale tablei Cayley a quasigrupului) care se intersectează într-un singur punct. A fost analizată existența unor astfel de perechi de transversale. În particular s-a arătat că:

a) un pătrat latin de ordinul n poate avea cel mult $n-2$ transversale obișnuite care se intersectează într-un singur punct, fiind disjuncte două câte două în celelalte puncte;

b) în orice pătrat latin de ordinul patru există exact 96 de perechi de transversale libere, și respectiv 13824 de perechi de transversale obișnuite, care se intersectează exact într-o celulă;

c) există exact 48 de pătrate latine diferite de ordinul 5, care posedă câte 2 transversale, dintre care una este diagonala principală T (cu ordinea fixată a elementelor), iar a doua are o singură celulă comună cu T; există exact 240 de perechi de transversale corespunzătoare celor 48 de pătrate latine diferite de ordinul 5 [42].

5. A fost soluționată (negativ) problema 1-derivabilității recursive a prelungirilor quasigrupurilor de ordinul 5, obținute prin adjuncția a două elemente și utilizarea a două transversale ce se intersectează exact într-un punct, una dintre care este diagonala principală T, în cazul când ordinea elementelor în T este 1, 2, 3, 4, 5 sau 2, 3, 4, 5, 1 [42].

6. Au fost determinate condiţiile necesare şi suficiente pentru ca prelungirile quasigrupurilor binare finite, obţinute utilizând construcţiile Bruck și, respectiv Belousov, să fie recursiv 1-derivabile [118].

Rezultatele autorului, care se referă la tema tezei sunt publicate în [42-52, 117, 118].

Teza propusă spre susţinere conţine criterii de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor (grupurilor) binare și n-are finite, precum și a prelungirilor quasigrupurilor prin diferite metode. În lucrare este propusă și studiată o nouă metodă de prelungire a quasigrupurilor finite, prin adjuncția a două elemente și utilizarea a două transversale care se intersectează într-o singură celulă.

Recomandări:

a) Metoda propusă de extindere a quasigrupurilor finite poate fi generalizată pentru orice număr potrivit de transversale ale unui pătrat latin, care se intersectează într-o singură celulă.

b) Rezultatele referitoare la 1-derivabilitatea recursivă a prelungirilor pot fi utilizate la caracterizarea derivabilității recursive a lor de ordinul $r \geq 2$.

c) Condițiile și criteriile de derivabilitate recursivă a quasigrupurilor (grupurilor) binare sau n-are finite pot fi aplicate la obținerea unor estimări noi ale spectrului acestor quasigrupuri (grupuri).

d) Caracterizările referitoare la metoda nouă de prelungire a quasigrupurilor, prezentată în lucrare, pot servi ca instrument pentru cercetarea existenței unor astfel de prelungiri recursiv derivabile. În particular, rămâne o problemă deschisă existența prelungirilor de tipul dat, care sunt recursiv 1-derivabile, în cazul quasigrupurilor de ordinul 5 (caz general).

e) Rezultatele lucrării pot fi utilizate pentru cercetări ulterioare în domeniul teoriei quasigrupurilor şi în domenii adiacente ale algebrei, geometriei şi combinatoricii, în teoria codurilor şi criptografie. De asemenea, rezultatele pot fi utilizate în calitate de suport pentru cursuri universitare de specialitate.

BIBLIOGRAFIE

1. ABASHIN, A. Linear recursive MDS-codes of dimension 2 and 3. In: *Discret. Mat.* 12 (1998), pp. 140 – 153. ISSN 0924-9265
2. ALDERSON, T. L. (6,3)-MDS codes over an alphabet of size 4. In: *Des. Codes Cryptogr*, **38** (2006), pp. 31 – 40. ISSN 0925-1022
3. ALDERSON, T. L. Extending MDS Codes. In: *Ann.Comb*. 9 (2005), pp. 125 – 135. ISSN 0218-0006
4. ALDERSON, T. L. *On MDS Codes and Bruen-Silverman Codes*. PhD. Thesis, University of Western Ontario, 2002.
5. BALASUBRAMANIAN, K. On transversals in latin squares. In: *Linear Algebra Appl*. 131 (1990), pp. 125 – 129. ISSN 0024-3795
6. BALL, S., GAMBOA, G., LAVRAUW, M. On additive MDS codes over small fields. In: *Adv. Math. of Communications*, Vol. 17, Issue 4, (2023), pp. 828-844. ISSN 1930-5346
7. BELOUSOV, V. Extensions of quasigroups. In: *Izv. Akad. Nauk Mold. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Mat. Nauk*, No. 8 (1967), pp. 3 – 24. (in Russian)
8. BELOUSOV, V. *Foundations of the Theory of Quasigroups and Loops*. Nauka, Moscow, 1967. (in Russian) 224 p.
9. BELOUSOV, V. D. Parastrophic-orthogonal quasigroups. In: *Quasigroups Relat. Systems* 13 (2005), pp. 25 – 72. ISSN 1561-2848
10. BELOUSOV, V. D. Systems of orthogonal operations. In: *Math. USSR, Sb*. 6(1968), pp. 33 – 52. ISSN 1064-5616
11. BELOUSOV, V. D., SANDIK, M. D. n-ary Quasi-groups and Loops. In: *Sib. Math. J.* 7(1) (1966), pp. 24 – 42. ISSN 0037-4466
12. BELYAVSKAYA, G. B. Contraction of quasigroups. I. In: *Bul. Akad. Stiince RSS Moldoven*, (1), 1970, pp. 6 – 12. (in Russian)
13. BELYAVSKAYA, G. B. Contraction of quasigroups. II. In: *Bul. Akad. Stiince RSS Moldoven*, (3), 1970, pp. 3 – 17. (in Russian)
14. BELYAVSKAYA, G. B. Generalized extension of quasigroups. In: *Mat. Issled.*, 5(2), 1970, pp. 28 – 48. (in Russian)
15. BELYAVSKAYA, G. B. On r-differentiable quasigroups. In: *Abstracts of the Int. Conf. on Pure and Applied Math. dedicated to D. A. Grave*, Kiev, 2002, pp. 11 – 12.
16. BELYAVSKAYA, G. B. Spectrum of partial admissibility of finite quasigroups (latin squares).

In: *Matematicheskie Zametki*, Vol. 32, No. 6, (1982), pp. 777 – 788. (in Russian) ISSN 0025-567X

17. BELYAVSKAYA, G. B. Recursively r-differentiable quasigroups within S-systems and MDS-codes. In: *Quasigroups and Related Systems* 20 (2012), pp. 157 – 168. ISSN 1561-2848
18. BELYAVSKAYA, G. B., MURATHUDJAEV, S. Admissible n-ary quasigroups. II. In: *Matematiceskie issledovanija*, 51 (1979), pp. 27 – 37. ISSN: 0542-9994 (in Russian)
19. BELYAVSKAYA, G. B., RUSSU, A. F. On the partial admissibility of quasigroups. In: *Matematiceskie issledovanija*, Chişinău, Ştiinţa, 43 (1977), pp. 50 – 58. (in Russian)
20. BLAUM, M., BRUCK, J. MDS array codes for correcting a single criss-cross error. In: *IEEE Transactions on Information Theory*, **46(3)** (2000), pp. 1068 – 1077. ISSN 0018-9448
21. BLAUM, M., BRUCK, J., VARDY, A. MDS array codes with independent parity symbols. In: *IEEE Transactions on Information Theory*, **42(2)** (1996), pp. 529 – 542. ISSN 0018-9448
22. BLAUM, M., ROTH, R. M. On lowest density MDS codes. In: *IEEE Transactions on Information Theory*, **45(1)** (1999), pp. 46 – 59. ISSN 0018-9448
23. BRUCK, R. H. Some results in the theory of quasigroups. In: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55 (1944), pp. 19 – 52. ISSN 0002-9947
24. BRUEN, A. A., THAS, J. A., BLOKHUIS, A. On MDS codes, arcs in $PG(n, q)$ with q even, and a solution of three fundamental problems of B. Segre. In: *Invent. Math*. **92(3),** 1988, pp. 441 – 460. ISSN 0020-9910
25. CARDELL, S. D. *Constructions of MDS Codes over Extension Alphabets*. PhD Thesis, 2012.
26. CARDELL, S. D., CLIMENT, J.-J., REQUENA, V. *On the construction and decoding of $\mathcal{F}_q$-linear MDS codes*. Submitted, (2012).
27. CARDELL, S. D., CLIMENT, J.-J., REQUENA, V. A construction of MDS array codes based on companion matrices. In: *Proceedings of the 3rd International Castle Meeting on Coding Theory and Applications* (2011), pp. 87 – 92. ISBN 978-84-490-2688-1
28. CARDELL, S. D., CLIMENT, J.-J., REQUENA, V. MDS array codes based on superregular matrices. In: *Proc. of the 11th International Conf. on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering* 2011 *(CMMSE 2011)*, pp. 290 – 295. ISBN 978-84-614-6167-7
29. CHEN, H. On a conjecture of hyperelliptic MDS codes. In: *Chinese Science Bulletin*., Vol. 40, No.1 (1995), pp. 10 – 11. ISSN 0023-074X
30. CHEN, H. On the main conjecture of geometric MDS codes. In: *Inter. Math. Research Notices*, No. 8 (1994), pp. 313 – 318. ISSN 1073-7928
31. CHEN, H. *On the main conjecture of hyperelliptic MDS codes*. Preprint, 1993.

32. CHEN, H., XU, L. On the main conjecture of geometric MDS codes arising from plane curves. In: *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*. 42(3) (1999). ISSN 0583-1431
33. CLIMENT, J.-J., NAPP, D., PEREA, C., PINTO R. A construction of MDS 2D convolutional codes of rate $1/n$ based on superregular matrices. In: *Linear Algebra and its Applications*, **437** (2012), pp. 766 – 780. ISSN 0024-3795
34. COOPER, C., KOVALENKO, I. M. The upper bound for the number of complete mappings. In: *Theory Probab. Math. Statist*. **53** (1996), pp. 77 – 83. ISSN 0094-9000
35. COUSELO, E., GONZALEZ, S., MARKOV, V., NECHAEV, A. Group codes and their nonassociative generalizations. In: *Discr. Math. Appl.*, 14(2), 2004, pp. 163–172. ISSN 0234-0860
36. COUSELO, E., GONZALEZ, S., MARKOV, V., NECHAEV, A. Group codes and their nonassociative generalizations. In: *Diskretnaya Matematika*, 16(1), 2004, pp. 146 – 156. (in Russian) ISSN 0234-0860
37. COUSELO, E., GONZALEZ, S., MARKOV, V., NECHAEV, A. Linear Recursive MDS-Codes and Asturian codes. In: *Electron. Notes Discret. Math*. 6 (2001), pp. 140-147. ISSN 1571-0653
38. COUSELO, E., GONZALEZ, S., MARKOV, V., NECHAEV, A. Parameters of recursive MDS-codes. In: *Discrete Math. Appl.* 10 (2000), pp. 443 − 453. ISSN 0234-0860
39. COUSELO, E., GONZALEZ, S., MARKOV, V., NECHAEV, A. Recursive MDS codes and recursively differentiable quasigroups. In: *Discrete Math. Appl*. **8**, No. 3 (1998), pp. 217 – 245. ISSN 0234-0860
40. COUSELO, E., GONZALEZ, S., MARKOV, V., NECHAEV, A. Recursive MDS-Codes and Pseudogeometries. In: *Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes*. AAECC 1999. pp. 211 – 220. ISBN 978-3-540-66723-0
41. COUSELO, E., GONZALEZ, S., MARKOV, V., NECHAEV, A. Recursive MDS-codes. In: *Workshop on coding and cryptography (WCC'99)*, Paris, January 11 – 14, 1999. pp. 271 – 277. ISBN 2-7261-1136-X
42. **CUZNEȚOV, El.** On a quasigroup prolongation and its recursive differentiability. In: *Acta et Commentationes Exact and Natural Sciences*, vol. 20, no. 2, 2025, pp. 25 – 39. ISSN 2537-6284
43. **CUZNEȚOV, El.**, SYRBU P. On a prolongation of quasigroups using two transversals. In: *Abstracts of the 32nd International Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM-2025)*, September 18 – 21, 2025, Bucharest, Romania, pp. 97 – 98. ISSN 2537-2688
44. **CUZNEȚOV, El.** Prolongation and recursive differentiability of quasigroups. In: *Abstracts of the National conf. with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations*,

State University of Moldova, September 18 – 19, 2025, pp. 216. ISBN 978-9975-62-898-3

45. **CUZNEȚOV, El.**, SYRBU P. On recursive differentiability of quasigroups prolongations. In: *Abstracts of the International Conference on Quasigroups and Related Systems (ConfQRS 2025)*, July 2 – 4, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 9 – 10. ISBN 978-9975-62-880-8
46. **CUZNEȚOV, El.**, SYRBU P. On a new quasigroup prolongation and its recursive differentiability. In: *Abstracts of the International Conference Mathematics & IT: Research and Education (MITRE–2025)*, June 26 – 29, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 15 – 16. ISBN 978-9975-62-879-2 (PDF)
47. **CUZNEȚOV, El.** On a method of prolongation of quasigroups. In: *Proceedings of the International Conference dedicated to the 60th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science*, October 10 – 13, 2024, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 55 – 60. ISBN 978-9975-68-523-8
48. **CUZNEȚOV, El.** Recursively differentiable finite quasigroups. In: *Abstracts of the National conference with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations*, State University of Moldova, September 12 – 13, 2024, Chișinău, Republic of Moldova, p. 262. ISBN 978-9975-62-756-6
49. **CUZNEȚOV, El.**, SYRBU P. On recursive differentiability of Bruck-Belousov prolongations of quasigroups. In: *Abstracts of the 30th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM-2023)*, Iași, Romania, September 14 – 17, 2023, p. 71. ISSN 2537-2688
50. **CUZNEȚOV, El.**, SYRBU P. On recursive differentiability of some quasigroups prolongations. In: *Abstracts of the Int. Conference "Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2023)*, Chișinău, Republic of Moldova, June 26 – 29, 2023, pp. 22 – 23. ISBN 978-9975-62-535-7
51. **CUZNEȚOV, El.**, SYRBU P. On recursively differentiable n-quasigroups. In: *Abstracts of the 29th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM-2022)*, August 25 – 27, 2022, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 161 – 163. ISBN 978-9975-76-401-8
52. **CUZNEȚOV, El.**, SYRBU P. On recursively differentiable quasigroups. In: *Abstracts of the International Virtual Conference "Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2021)*, dedicated to the 75th anniversary of Moldova State University, July 1 – 3, 2021, Chișinău, Republic of Moldova, pp. 47 – 48. ISBN 978-9975-158-19-0
53. DAMM, M. *Total anti-symmetrische Quasigruppen*. Doctoral dissertation. Philipps-Universität Marburg, 2004, 125 p. (in German). https://doi.org/10.17192/z2004.0516
54. DE BOER, M. A. *MDS Codes and Hyperelliptic Function Fields*. Master's Thesis, Eindhoven

University of Technology, 1992.

55. DENES, J. Latin squares and non-binary encodings. In: *Proc. Conf. Information Theory* (Cachan, France,1977), CNRS, Paris, 1979, pp. 215 – 221.

56. DENES, J., KEEDWELL, A. A new conjecture concerning admissibility of groups. In: *European J. Combin*. **10** (1989), pp. 171 – 174. ISSN 0195-6698

57. DERIYENKO, I. I., DUDEK, W. A. Contractions of quasigroups and Latin squares. In: *Quasigroups Relat. Systems* 21 (2013), pp. 165 – 174. ISSN 1561-2848

58. DERIYENKO, I. I., DUDEK, W. A. On prolongations of quasigroups. In: *Quasigroups Relat. systems* 16 (2008), pp. 187 – 198. ISSN 1561-2848

59. EVANS, A. B. The existence of complete mappings of finite groups. In: *Congr. Numer*. **90** (1992), pp. 65 – 75. ISSN 0384-9864

60. EVANS, A. B. The existence of complete mappings of $\mathrm{SL}(2, q), q \equiv 3$ modulo 4. In: *Finite Fields Appl*. **11** (2005), pp. 151 – 155. ISSN 1071-5797

61. EVANS, T. The constuction of orthogonal k-steins and Latin k-cubes. In: *Aequationes Mathematicae*, **14** (1976), pp. 485 – 491. ISSN 0001-9054

62. GAMBOA QUINTERO, G. A. *Additive MDS codes.* Master's Thesis. Universitat Politécnica Catalunya, 2020.

63. GRASSL, M., RÖTTELER, M. Quantum MDS codes over small fields. In: *Proc. Int. Symp. Inf. Theory* (ISIT), 2015, pp. 1104 – 1108. ISBN 978-1-4673-7703-4.

64. HALL, M., PAIGE, L. J. Complete mappings of finite groups. In: *Pacific J. Math.*, 5(4) (1955), pp. 541 – 549. ISSN 0030-8730

65. HSIANG, J., HSU, D. F., SHIEH, Y. P. On the hardness of counting problems of complete mappings. In: *Disc. Math.* **277** (2004), pp. 87 – 100. ISSN 0012-365X

66. HSIANG, J., SHIEH, Y. P., CHEN, Y. The cyclic complete mappings counting problems. In: *Problems and problem sets for ATP workshop in conjunction with CADE-18 and FLoC 2002*, Copenhagen, 2002. https://www.researchgate.net/publication/2568740

67. HUFFMAN, W. C., PLESS, V. *Fundamentals of Error-Correcting Codes*. Cambridge University Press, New York, 2003, 666 p. ISBN 978-0-511-07622-0

68. IZBASH, V., SYRBU, P. On recursively differentiable binary quasigroups. In: *Proceedings of the 11-th Conf. on Applied and Industrial Mathematicsv (CAIM2003)*, May 29–31, 2003, Oradea, Romania, Vol. 1, pp. 149 – 152. ISBN 973-613-330-3

69. IZBASH, V., SYRBU, P. Recursively differentiable quasigroups and complete recursive codes.

In: *Commentat. Math. Univ. Carol*. 45, No.2, (2004), pp. 257 – 263. ISSN 0010-2628

70. J. VAN REES, G. H. Subsquares and transversals in latin squares. In: *Ars Combin*. **29 B** (1990), pp. 193 – 204. ISSN 0381-7032
71. KEEDWELL A., DENES, J. *Latin Squares and their Applications,* Second Edition. Elsevier Science, 2015, 438 p. ISBN 978-0-444-63555-6.
72. KEEDWELL A., DENES, J. *Latin Squares and their Applications*. Akadémiai Kiadó, Budapest; Acad. Press, New York, English Univ. Press, London, 1974. 547 p. ISBN 978-0122-09-350-0
73. KEEDWELL A., DENES, J. *Latin squares. New developments in the theory and applications*. Annals of Discrete Mathematics 46 (1991), 453 p. ISBN 978-0-444-88899-0
74. KEEDWELL, A. D. Sequenceable groups, generalized complete mappings, neofields and block designs. In: *Combin. Math.* X. **1036** (1983), pp. 49 – 71. ISBN 978-3-540-12708-6
75. KOKKALA, J. I., ÖSTERGARD, P. R. J. Further results on the classification of MDS codes. In: *Adv. Math. Commun*., **10(3)** (2016), pp. 489 – 498. ISSN 1930-5346
76. KOKKALA, J. I., KROTOV, D. S., ÖSTERGARD, P. R. J. On the classification of MDS codes. In: *IEEE Transactions on Information Theory*, **61(12)** (2015), pp. 6485 – 6492. ISSN 0018-9448
77. KOVALENKO I. N. Upper bound for the number of complete maps. In: *Cybernet. Systems Anal*. **32** (1996), pp. 65 – 68. ISSN 1060-0396
78. KROTOV, D. S. On decomposability of 4-ary distance 2-MDS codes, double-codes, and n-quasigroups of order 4. In: *Discrete Math*. 308(15) (2008), pp. 3322 – 3334. ISSN 0012-365X
79. KROTOV, D. S. On irreducible n-ary quasigroups with reducible retracts. In: *European J. Combin.* 29(2) (2008), pp. 507 – 513. ISSN: 0195-6698
80. KROTOV, D. S. On the binary codes with parameters of doubly-shortened 1-perfect codes. In: *Des. Codes Cryptogr*. 57(2) (2010), pp. 181 – 194. ISSN 0925-1022
81. KROTOV, D. S., POTAPOV, V. N. n-ary quasigroups of order 4. In: *SIAM J. Discrete Math.* 23(2) (2009), pp. 561 – 570. ISSN 0895-4801
82. KROTOV, D. S., POTAPOV, V. N. On multifold MDS and perfect codes that are not splittable into onefold codes. In: *Problemy Peredachi Informatsii* 1 (2004), pp. 6 – 14 [Problems Inform. Transmission 40 (1) (2004), pp. 5 – 12]. ISSN 0032-9460
83. KROTOV, D. S., POTAPOV, V. N. On the reconstruction of N-quasigroups of order 4 and the upper bounds on their numbers. In: *Proc. of the Conference Devoted to the 90th Anniversary of Alexei A. Lyapunov* (2001), pp. 323–327 [http://www.sbras.ru/ws/Lyap2001/2363].
84. KROTOV, D. S., POTAPOV, V. N., SOKOLOVA, P. V. On reconstructing reducible n-ary

quasigroups and switching subquasigroups. In: *Quasigroups Relat. Syst*. 16 (2008), pp. 55 – 67. ISSN 1561-2848

85. KURAKIN, V., KUZMIN, A., MARKOV, V., MIKHALEV, A., NECHAEV, A. Linear Codes and Polylinear Recurrences over Finite Rings and Modules. In: *Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes*. AAECC 1999. pp. 365–390. ISBN 978-3-540-66723-0
86. LARIONOVA, I. On recursively differentiable quasigroups. In: *Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători*, 4, 2015, p. 21. ISBN 978-9975-4257-2-8
87. LARIONOVA, I., SYRBU, P. On Recursive Differentiability of Binary Quasigroups. In: *Studia Universitatis Moldaviae*, 2(82), 2015, pp. 53 – 60. ISSN 1857-2073
88. LOUIDOR, E., ROTH, R. M. Lowest density MDS codes over extension alphabets. In: *IEEE Transactions on Information Theory*, **52(7)** (2006), pp. 46 – 59. ISSN 0018-9448
89. MACWILLIAMS, F. J., SLOANE, N. J. A. *The Theory of Error-Correcting Codes*. Moscow, Svyaz', 1979, 744 p. (in Russian).
90. MACWILLIAMS, F. J., SLOANE, N. J. A. *The Theory of Error-Correcting Codes*. Elsevier Science Publishers, B.V., North Holland, 1977, 762 p. ISBN 0-444-85193-3
91. MANN H. The construction of orthogonal latin squares. In: *Ann. Math. Stat*., 13, 1942, pp. 418-423. ISSN 0003-4851
92. MARKOV, V., MIKHALEV, A., NECHAEV, A. Linear codes over rings. In: *The Concise Handbook of Algebra*., 2002, pp. 530 – 534. ISBN 978-94-017-3269-7
93. MARKOV, V., NECHAEV, A., SKAZHENIK, S., TVERITINOV, E. Pseudogeometries with clusters and an example of a recursive $[4,2,3]_{42}-$code. In: *Fundam. Prikl. Mat*., 14(4), 2008, pp. 181 – 192. ISSN 1560-5159
94. MARKOVSKI, S., MILEVA, A. On Construction of Orthogonal d-ary Operations. In: *Publications de l'Institut Mathématique*, 101 (115) (2017), pp. 109 – 119. ISSN 0350-1302
95. MCKAY, B. D., MCLEOD, J. C., WANLESS, I. M. The number of transversals in a Latin square. In: *Des. Codes Cryptogr*. **40** (2006), pp. 269 – 284. ISSN 0925-1022
96. MILEVA A., DIMITROVA, V. On Recursive Derivates of k-ary Operations. In: *Proceedings of the 4th Conference of Mathematical Society of Moldova CMSM4'2017*, June 28-July 2, 2017, Chisinau, Republic of Moldova. pp. 129 – 132. ISBN 978-9975-71-915-5
97. MUNUERA, C. On MDS elliptic codes. In: *Discrete Math*., 117 (1993), pp. 279 – 286. ISSN 0012-365X
98. MUNUERA, C. On the main conjecture on geometric MDS Codes. In: *IEEE Trans. Inf. Theory*,

38(5) (1992), pp. 1573 – 1577. ISSN 0018-9448

99. MURATHUDJAEV, S. Admissible n-quasigroups. The connection between admissibility and orthogonality. In: *Mat. Issled.,* vyp. 83, 1985, pp. 77 – 86. (in Russian) ISSN 0542-9994

100. NECHAEV, A., KUZ'MIN, A., MARKOV, V. Linear codes over finite rings and modules. In: *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 3(1), 1997, pp. 195 – 254. ISSN 1560-5159

101. NECHAEV, A., KUZMIN, A. Formal duality of linearly presentable codes over a Galois field. In: *Applied Algebra, Algebraic Alg. Error-Correcting Codes*. AAECC 1997. pp. 263 – 276. ISBN 978-3-540-63163-7

102. NIEDERREITER, H., ROBINSON, K. H. Complete mappings of finite fields. In: *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **33(2)** (1982), pp. 197 – 212. ISSN 1446-7887

103. PAIGE, L. J. Complete mappings of finite groups. In: *Pacific J. Math*., **1(1)** (1951), pp. 111 – 116. ISSN 0030-8730

104. PFLUGFELDER, H. O. *Quasigroups and loops: introduction*. Sigma Series in Pure Mathematics, 7. Heldermann Verlag, Berlin, 1990. 147 p. ISBN 978-3885-38-007-8

105. PHELPS, K. T. A general product construction for error correcting codes. In: *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 5(2) (1984), pp. 224 – 228. ISSN 0196-5212

106. POTAPOV, V. N. On extensions of partial n-quasigroups of order 4. In: *Siberian Advances in Mathematics*, 22(2) (2012), pp. 135 – 151. ISSN 1055-1344

107. RICHARDSON, T., URBANKE, R. *Modern Coding Theory*. Cambridge University Press, 2007. 572 p. ISBN 978-0-521-85229-6

108. ROTH, R. M., LEMPEL, A. On MDS codes via Cauchy matrices. In: *IEEE Trans. Inf. Theory*, **35(6)** (1989), pp. 1314 – 1319. ISSN 0018–9448

109. ROTH, R. M., SEROUSSI, G. On generator matrices of MDS codes. In: *IEEE Trans. Inf. Theory*, **31(6)** (1985), pp. 826 – 830. ISSN 0018–9448

110. SHCHERBACOV, V. A. Prolongation of quasigroups. In: *arXiv*:1507.05608v1 [math.GR]

111. SHIEH, Y. P., HSIANG, J., HSU, D. F. On the enumeration of abelian k-complete mappings. *Congr. Numer.*, **144** (2000), pp. 67 – 88. ISSN: 0384-9864

112. SHIROMOTO, K. Note on MDS codes over the integers modulo p^m. In: *Hokkaido Mathematical Journal*, **29** (2000), pp. 149 – 157. ISSN 0385-4035

113. SMARANDACHE, R., GLUESING-LUERSSEN, H., ROSENTHAL, J. Constructions of MDS-convolutional codes. In: *IEEE Trans. Inf. Theory*, **47(5)** (2001), pp. 2045 – 2049. ISSN 0018–9448

114. SØNDERGAARD, L. *The Non-Existence of Long MDS Codes from Elliptic Curves*. Preprint.

115. STUHL, I. *Extensions of loops and quasigroups*. PhD dissertation, University of Debrecen, 2010, 109 p.

116. SYRBU, P. On the order of recursive differentiability of finite binary quasigroups. In: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat.*, No. 3 (103) (2023), pp. 103 – 106. ISSN 1024-7696

117. SYRBU, P., **CUZNEŢOV, El**. On recursively differentiable k - quasigroups. In: *Bul. Acad. Şt. Rep. Mold., Mat.*, No. 2 (99) (2022), pp. 68 – 75. ISSN 1024-7696

118. SYRBU, P., **CUZNEŢOV, El**. On recursive 1-differentiability of the quasigroups prolongations. In: *Bul. Acad. Şt. Rep. Mold., Mat.*, No. 2 (101) (2023), pp. 102 – 109. ISSN 1024-7696

119. TSFASMAN, M. A., VLĂDUŢ, S. G. *Algebraic-geometric codes*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, 1991. 671 p. ISBN 978-1-4020-0335-6

120. VOLTA, F. GAVIOLI, D. N. Complete mappings in some linear and projective groups. In: *Arch. Math. (Basel)*, **61** (1993), pp. 111 – 118. ISSN 0003-889X

121. WANLESS, I. M. A generalisation of transversals for latin squares. In: *Electron. J. Combin*. **9(1)** (2002), R12. ISSN 1077-8926

122. WANLESS, I. M. Transversals in latin squares. In: *Quasigroups Related Systems* 15 (2007), pp. 169 – 190. ISSN 1561-2848

123. WOOLBRIGHT, D. E. An $n \times n$ latin square has a transversal with at least $n - \sqrt{n}$ distinct symbols. In: *J. Combin. Theory Ser. A,* **24** (1978), pp. 235 – 237. ISSN 0097-3165

124. XU, L., BOHOSSIAN, V., BRUCK, J., WAGNER, D. G. Low-density MDS codes and factors of complete graphs. In: *IEEE Trans. Inf. Theory*, **45(6)** (1999), pp. 1817–1826. ISSN 0018-9448

125. XU, L., BRUCK, J. X-code: MDS array codes with optimal encoding. In: *IEEE Trans. Inf. Theory*, **45(1)** (1999), pp. 272 – 276. ISSN 0018–9448

126. YAMAMOTO, K. Generation principles of Latin squares. In: *Bull. Inst. Internat. Statist*., 38: pp. 73–76, 1961.

127. YORK, E. V. *Algebraic Description and Construction of Error Correcting Codes, a Systems Theory Point of View*. PhD Thesis, University of Notre Dame, 1997.

128. ZHU, Lie. A short disproof of Euler's conjecture concerning orthogonal Latin squares. With editorial comment by A. D. Keedwell. In: *Ars Combin*., 14: pp. 47–55, 1982. ISSN 0381-7032

129. ZIMAN, M. Extensions of Latin subsquares and local embeddability of groups and group algebras. In: *Quasigroups Related Systems* 11 (2004), pp. 115 – 125. ISSN 1561-2848

ANEXE

ANEXA 1

Perechile de transversale (T, S), unde T – diagonala principală cu ordinea elementelor în celule: 2,3,4,5,1, corespunzătoare celor 48 de pătrate latine diferite de ordinul 5, date în Figura 3.5.

$1'.1'.^*$

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

$1'.2'.^*$

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

$1'.3'.^*$

2	1	5	4	3
5	3	1	2	4
3	2	4	1	5
1	4	3	5	2
4	5	2	3	1

$1'.4'.^*$

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

$2'.1'.$

2	5	1	3	4
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

$2'.2'.$

2	4	3	1	5
1	3	5	2	4
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	5	2	4	1

$2'.3'.^*$

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

$2'.4'.^*$

2	4	3	1	5
5	3	5	4	2
5	1	4	2	3
3	2	1	5	4
4	5	2	3	1

$2'.5'.^*$

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

$2'.6'.^*$

2	4	3	1	5
5	3	1	2	4
1	5	4	3	2
4	1	2	5	3
3	2	5	4	1

$2'.7'.$

2	1	5	4	3
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

$2'.8'.$

2	4	3	1	5
5	3	1	4	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
4	2	5	3	1

$3'.1'.^*$

2	5	1	3	4
1	3	5	4	2
3	2	4	1	5
4	1	2	5	3
5	4	3	2	1

$3'.2'.^*$

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	2	3	1

$3'.3'.^*$

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

$3'.4'.^*$

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

$4'.1'.^*$

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

$4'.2'.^*$

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

$4'.3'^*$

2	1	5	4	3
4	3	2	1	5
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1

$4'.4'.^*$

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

$5'.1'.$

2	5	1	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

$5'.2'.$

2	4	3	1	5
5	3	1	4	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
4	2	5	3	1

$5'.3'.^*$

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

$5'.4'^*$

2	5	1	3	4
1	3	5	4	2
3	2	4	1	5
4	1	2	5	3
5	4	3	2	1

$5'.5'.^*$

2	5	1	3	4
4	3	2	1	5
5	1	4	2	3
1	4	3	5	2
3	2	5	4	1

5′. 6′.*

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

5′. 7′.

2	1	5	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

5′. 8′.

2	5	1	3	4
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

6′. 1′*

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

6′. 2′*

2	4	3	1	5
1	3	5	4	2
5	1	4	2	3
3	2	1	5	4
4	5	2	3	1

6′. 3′.*

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

6′. 4′.*

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

7′. 1′.*

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	2	3	1

7′. 2′.*

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

7′. 3′.*

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

7′. 4′.*

2	5	1	3	4
4	3	2	1	5
5	1	4	2	3
1	4	3	5	2
3	2	5	4	1

8′. 1′.*

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

8′. 2′*

2	4	3	1	5
5	3	1	2	4
1	5	4	3	2
4	1	2	5	3
3	2	5	4	1

8′. 3′.*

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

8′. 4′.*

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

9′. 1′.

2	1	5	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

9′. 2′.

2	4	3	1	5
1	3	5	2	4
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	5	2	4	1

9′. 3′.*

2	1	5	4	3
5	3	1	2	4
3	2	4	1	5
1	4	3	5	2
4	5	2	3	1

9′. 4′.*

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

9′. 5′.*

2	1	5	4	3
4	3	2	1	5
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1

9′. 6′.*

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

9′. 7′.

2	1	5	4	3
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

9′. 8′.

2	5	1	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

10′. 1′.*

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

10′. 2′.*

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

10′. 3′.*

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

10′. 4′.*

2	5	1	3	4
1	3	5	4	2
3	2	4	1	5
4	1	2	5	3
5	4	3	2	1

11′. 1′.*

2	1	5	4	3
5	3	1	2	4
3	2	4	1	5
1	4	3	5	2
4	5	2	3	1

11′. 2′.*

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

11′. 3′.*

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

11′.4′.*

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

12′.1′.

2	4	5	1	3
5	3	1	2	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

12′.2′.

2	1	5	3	4
4	3	2	1	5
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
5	2	3	4	1

12′.3′.*

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

12′.4′.*

2	1	5	4	3
4	3	2	1	5
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1

12′.5′.*

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

12′.6′.*

2	5	1	3	4
4	3	2	1	5
5	1	4	2	3
1	4	3	5	2
3	2	5	4	1

12′.7′.

2	5	1	4	3
4	3	2	1	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	4	5	2	1

12′.8′.

2	4	1	3	5
1	3	5	4	2
5	2	4	1	3
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

13′.1′.*

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

13′.2′.*

2	4	3	1	5
1	3	5	4	2
5	1	4	2	3
3	2	1	5	4
4	5	2	3	1

13′.3′.*

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

13′.4′.*

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

14′.1′.

2	5	1	4	3
4	3	2	1	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	4	5	2	1

14′.2′.

2	1	3	4	5
5	3	1	2	4
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

14′.3′.*

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

14′.4′.*

2	1	5	4	3
5	3	1	2	4
3	2	4	1	5
1	4	3	5	2
4	5	2	3	1

14′.5′.*

2	4	3	1	5
5	3	1	2	4
1	5	4	3	2
4	1	2	5	3
3	2	5	4	1

14′.6′.*

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

14′.7′.

2	4	5	1	3
5	3	1	2	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

14′.8′.

2	5	3	1	4
1	3	5	4	2
2	5	3	1	4
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

15′.1′.*

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

15′.2′.*

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

15′.3′.*

2	1	5	4	3
4	3	2	1	5
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1

15′.4′.*

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	2	3	1

16′.1′.*

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

16′.2′.*

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

16′.3′.*

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

16′.4′.*

2	4	3	1	5
5	3	1	2	4
1	5	4	3	2
4	1	2	5	3
3	2	5	4	1

17′.1′.*

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

17′.2′.*

2	5	1	3	4
4	3	2	1	5
5	1	4	2	3
1	4	3	5	2
3	2	5	4	1

17′.3′.*

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	2	3	1

17′.4′.*

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

18′.1′.

2	5	3	1	4
1	3	5	4	2
3	1	4	2	5
4	2	1	5	3
5	4	2	3	1

18′.2′.

2	1	5	3	4
4	3	2	1	5
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
5	2	3	4	1

18′.3′.*

2	5	1	3	4
1	3	5	4	2
3	2	4	1	5
4	1	2	5	3
5	4	3	1	1

18′.4′.*

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

18′.5′.*

2	4	3	1	5
1	3	5	4	2
5	1	4	2	3
3	2	1	5	4
4	5	2	3	1

18′.6′.*

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

18′.7′

2	4	1	3	5
1	3	5	4	2
5	2	4	1	3
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

18′.8′.

2	1	3	4	5
5	3	1	2	4
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

19′.1′*

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

19′.2′*

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

19′.3′*

2	1	5	4	3
4	3	2	1	5
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1

19′.4′.*

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

20′.1′.

2	5	1	4	3
1	3	5	2	4
3	2	4	1	5
4	1	3	5	2
5	4	2	3	1

20′.2′.

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

20′.3′.*

2	5	1	3	4
1	3	5	4	2
3	2	4	1	5
4	1	2	5	3
5	4	3	2	1

20′.4′.*

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

20′.5′.*

2	1	5	4	3
5	3	1	2	4
3	2	4	1	5
1	4	3	5	2
4	5	2	3	1

20′.6′.*

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

20′.7′.

2	1	5	3	4
5	3	1	4	2
3	2	4	1	5
1	4	2	5	3
4	5	3	2	1

20′.8′.

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

21′.1′.*

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

21′.2′.*

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	2	3	1

21′.3′.*

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

21′.4′.*

2	5	1	3	4
4	3	2	1	5
5	1	4	2	3
1	4	3	5	2
3	2	5	4	1

22′.1′.*

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

22′.2′.*

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

22′.3′.*

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

$22'.4'.^{*}$

2	4	3	1	5
5	3	1	2	4
1	5	4	3	2
4	1	2	5	3
3	2	5	4	1

$23'.1'.$

2	1	5	3	4
5	3	1	4	2
3	2	4	1	5
1	4	2	5	3
4	5	3	2	1

$23'.2'.$

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
5	1	4	2	3
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

$23'.3'.^{*}$

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

$23'.4'.^{*}$

2	5	1	3	4
4	3	2	1	5
5	1	4	2	3
1	4	3	5	2
3	2	5	4	1

$23'.5'.^{*}$

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

$23'.6'.^{*}$

2	4	3	1	5
1	3	5	4	2
5	1	4	2	3
3	2	1	5	4
4	5	2	3	1

$23'.7'.$

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

$23'.8'.$

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
1	5	4	3	2
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

$24'.1'.^{*}$

2	5	1	3	4
1	3	5	4	2
3	2	4	1	5
4	1	2	5	3
5	4	3	2	1

$24'.2'.^{*}$

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

$24'.3'.^{*}$

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

$24'.4'.^{*}$

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

$25'.1'.^{*}$

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

$25'.2'.^{*}$

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

$25'.3'.^{*}$

2	4	3	1	5
1	3	5	4	2
5	1	4	2	3
3	2	1	5	4
4	5	2	3	1

$25'.4'.^{*}$

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	2	3	1

$26'.1'.^{*}$

2	1	5	4	3
5	3	1	2	4
3	2	4	1	5
1	4	3	5	2
4	5	2	3	1

$26'.2'.^{*}$

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

$26'.3'.^{*}$

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

$26'.4'.^{*}$

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

$27'.1'.$

2	5	1	4	3
1	3	5	2	4
3	2	4	1	5
4	1	3	5	2
5	4	2	3	1

$27'.2'.$

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
1	5	4	3	2
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

$27'.3'.^{*}$

2	4	3	1	5
5	3	1	2	4
1	5	4	3	2
4	1	2	5	3
3	2	5	4	1

$27'.4'.^{*}$

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

$27'.5'.^{*}$

2	1	5	4	3
4	3	2	1	5
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1

$27'.6'.^{*}$

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

$27'.7'.$

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
5	1	4	2	3
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

$27'.8'.$

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

$28'.1'.^{*}$

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

28′.2′.*

2	4	3	1	5
5	3	1	2	4
1	5	4	3	2
4	1	2	5	3
3	2	5	4	1

28′.3′.*

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

28′.4′.*

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

29′.1′.*

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

29′.2′.*

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

29′.3′.*

2	1	5	4	3
5	3	1	2	4
3	2	4	1	5
1	4	3	5	2
4	5	2	3	1

29′.4′.*

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	2	3	1

30′.1′.

2	4	5	1	3
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
3	2	1	5	4
4	5	3	2	1

30′.2′.

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	1	2	5	3
5	2	3	4	1

30′.3′.*

2	1	5	4	3
4	3	2	1	5
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1

30′.4′.*

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

30′.5′.*

2	4	3	1	5
1	3	5	4	2
5	1	4	2	3
3	2	1	5	4
4	5	2	3	1

30′.6′.*

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

30′.7′.

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
5	2	4	1	3
1	4	3	5	2
3	5	2	4	1

30′.8′.

2	1	3	4	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	2	1	5	4
5	4	2	3	1

31′.1′.*

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

31′.2′.*

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	2	3	1

31′.3′.*

2	5	1	3	4
4	3	2	1	5
5	1	4	2	3
1	4	3	5	2
3	2	5	4	1

31′.4′.*

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

32′.1′.

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
4	1	2	5	3
3	4	5	2	1

32′.2′.

2	1	3	4	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	2	1	5	4
5	4	2	3	1

32′.3′.*

2	4	3	1	5
5	3	1	2	4
1	5	4	3	2
4	1	2	5	3
3	2	5	4	1

32′.4′.*

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

32′.5′.*

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

32′.6′.*

2	5	1	3	4
1	3	5	4	2
3	2	4	1	5
4	1	2	5	3
5	4	3	2	1

32′.7′.

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
3	1	4	2	5
1	4	3	5	2
4	2	5	3	1

32′.8′.

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	1	2	5	3
5	2	3	4	1

33′.1′.*

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

33′.2′.*

2	4	3	1	5
1	3	5	4	2
5	1	4	2	3
3	2	1	5	4
4	5	2	3	1

33′.3′.*

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

33′.4′.*

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

34′.1′.*

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

34′.2′.*

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

34′.3′.*

2	5	1	3	4
1	3	5	4	2
3	2	4	1	5
4	1	2	5	3
5	4	3	2	1

34′.4′.*

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

35′.1′.*

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

35′.2′.*

2	1	5	4	3
4	3	2	1	5
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1

35′.3′.*

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

35′.4′.*

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

36′.1′.

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
3	1	4	2	5
1	4	3	5	2
4	2	5	3	1

36′.2′.

2	4	5	1	3
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
3	2	1	5	4
4	5	3	2	1

36′.3′.*

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

36′.4′.*

2	1	5	4	3
5	3	1	2	4
3	2	4	1	5
1	4	3	5	2
4	5	2	3	1

36′.5′.*

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

36′.6′.*

2	5	1	3	4
4	3	2	1	5
5	1	4	2	3
1	4	3	5	2
3	2	5	4	1

36′.7′.

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
4	1	2	5	3
3	4	5	2	1

36′.8′.

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
5	2	4	1	3
1	4	3	5	2
3	5	2	4	1

37′.1′.*

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

37′.2′.*

2	4	3	1	5
1	3	5	4	2
5	1	4	2	3
3	2	1	5	4
4	5	2	3	1

37′.3′.*

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

37′.4′.*

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

38′.1′.

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
4	5	2	3	1

38′.2′.

2	4	1	3	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
4	1	3	5	2
3	2	5	4	1

38′.3′.*

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

38′.4′.*

2	4	3	1	5
5	3	1	2	4
1	5	4	3	2
4	1	2	5	3
3	2	5	4	1

38′.5′.*

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

38′.6′.*

2	5	1	3	4
4	3	2	1	5
5	1	4	2	3
1	4	3	5	2
3	2	5	4	1

38′.7′.

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
5	4	3	2	1

38′.8′.

2	5	3	1	4
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	4	2	5	3
3	2	5	4	1

39′.1′.*

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

39′.2′.*

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

39′.3′.*

2	5	1	3	4
1	3	5	4	2
3	2	4	1	5
4	1	2	5	3
5	4	3	2	1

39′.4′.*

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

40′.1′.*

2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1

40′.2′.*

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

40′.3′.*

2	1	5	4	3
4	3	2	1	5
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1

40′.4′.*

2	4	5	1	3
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	2	3	5	4
3	5	2	4	1

41′.1′.

2	5	3	1	4
4	3	1	2	5
5	1	4	3	2
1	4	2	5	3
3	2	5	4	1

41′.2′.

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	2	3	1

41′.3′*

2	5	3	1	4
1	3	2	4	5
5	1	4	3	2
4	2	1	5	3
3	4	5	2	1

41′.4′.*

2	4	3	1	5
1	3	5	4	2
5	1	4	2	3
3	2	1	5	4
4	5	2	3	1

41′.5′.*

2	1	5	4	3
5	3	1	2	4
3	2	4	1	5
1	4	3	5	2
4	5	2	3	1

41′.6′.*

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

41′.7′.

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
4	5	2	3	1

41′.8′.

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	3	2	1

42′.1′.*

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	2	3	1

42′.2′.*

2	4	3	1	5
5	3	1	2	4
1	5	4	3	2
4	1	2	5	3
3	2	5	4	1

42′.3′.*

2	4	5	1	3
5	3	1	4	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
4	5	3	2	1

42′.4′.*

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

43′.1′.*

2	1	5	3	4
4	3	1	2	5
3	5	4	1	2
1	4	2	5	3
5	2	3	4	1

43′.2′.*

2	4	1	3	5
4	3	5	1	2
1	5	4	2	3
3	1	2	5	4
5	2	3	4	1

43′.3′.*

2	1	5	4	3
5	3	1	2	4
3	2	4	1	5
1	4	3	5	2
4	5	2	3	1

43′.4′.*

2	5	1	4	3
5	3	2	1	4
1	2	4	3	5
4	1	3	5	2
3	4	5	2	1

44′.1′.*

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	3	2	1

44′.2′.*

2	5	1	3	4
4	3	2	1	5
5	1	4	2	3
1	4	3	5	2
3	2	5	4	1

44′.3′.*

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
5	4	2	3	1

44′.4′.*

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	2	3	1

45′.1′.

2	1	5	3	4
1	3	2	4	5
3	5	4	1	2
4	2	1	5	3
5	4	3	2	1

45′.2′.

2	4	1	3	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
4	1	3	5	2
3	2	5	4	1

45′.3′.*

2	5	1	3	4
1	3	5	4	2
3	2	4	1	5
4	1	2	5	3
5	4	3	2	1

45′.4′.*

2	4	1	3	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1

45′.5′.*

2	1	5	4	3
4	3	2	1	5
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1

45′.6′.*

2	1	3	4	5
5	3	2	1	4
1	5	4	2	3
3	4	1	5	2
4	2	5	3	1

45′.7′.

2	5	1	4	3
4	3	5	1	2
1	2	4	3	5
3	1	2	5	4
5	4	3	2	1

45′.8′.

2	1	3	4	5
1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
3	4	1	5	2
4	5	2	3	1

ANEXA 2

Programul (codul) GAP pentru generarea și afișarea tutror celor 576 de patratelor latine de ordinul 4

```
# order of the Latin square
n:=4;;
# number of Latin squares found so far
count:=0;
# start with the empty Latin square
L:=List([1..n],i->List([1..n],j->0));;
# function for trying all non-clashing symbols in cell (i,j)
ExtendPartialLatinSquare:=function(i,j)
  local s;
  # try symbol s in cell (i,j)
  for s in [1..n] do
    # symbol s already used in column j
    if(ForAny([1..i-1],k->L[k][j]=s)) then continue; fi;
    # symbol s already used in row i
    if(ForAny([1..j-1],k->L[i][k]=s)) then continue; fi;
    # no clashes arise
    L[i][j]:=s;
    # if L is a Latin square, count it;
    # otherwise try filling in the next empty cell
    if(j=n) then
      if(i=n) then
        count:=count+1;
        Display(L);
      else
        ExtendPartialLatinSquare(i+1,1);
      fi;
    else
      ExtendPartialLatinSquare(i,j+1);
    fi;

    L[i][j]:=0;

  od;
end;;

ExtendPartialLatinSquare(1,1);

Print("Found ",count," Latin squares of order ",n,"\n");
```

(acest cod poate fi utilizat de asemenea și pentru generarea și afișarea tuturor celor 161280 de pătrate latine de ordinul 5)

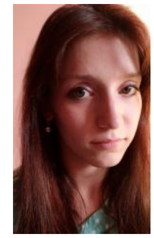
DECLARAŢIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnatul, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări şi realizări ştiinţifice. Conştientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecinţele în conformitate cu legislaţia în vigoare.

Cuznețov Elena

Semnătura

Data 8 mai 2026



CURRICULUM VITAE

NUME, PRENUME: Cuznețov Elena
CETĂȚENIE: Moldoveancă
STUDII:
1. Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, Școala doctorală științe ale naturii, Octombrie 2020 – prezent,
Specialitatea: Logica matematică, algebră şi teoria numerelor
2. Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, Septembrie 2017 – Iunie 2019, specialitatea: Analiza statistică a datelor şi modelarea proceselor economico – financiare
Calificarea obținută: Master în Matematică
3. Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, Septembrie 2014 – Iunie 2017, specialitatea: Matematică Aplicată
Calificarea obținută: Licențiat în Științe Exacte
STAGII DE PRACTICĂ:
1. Practica de specialitate, Universitatea de Stat din Moldova, Laboratorul ”Optimizare și matematică discretă”, 2018
2. Practica de licență, Universitatea de Stat din Moldova, 2017
3. Practica pedagogică de stat, Liceul Teoretic ”Dante Alighieri”, Chișinău, martie – aprilie 2017
4. Practica de producție: Institutul de Matematică și Informatică AȘM, 2017
5. Practica de inițiere la didactica matematicii, Liceul Teoretic ”Ion Creangă”, Chișinău, 2017
6. Practica pedagogică extraccuriculară, Tabăra de vară pentru copii ”Cristiano”, Slobozia-Dușca, 13 – 22 iulie 2016
7. Practica de inițiere în specialitate, Universitatea de Stat din Moldova, 2016
8. Practica de inițiere la psihologie, Universitatea de Stat din Moldova, 2016
9. Practica de inițiere la pedagogie, Universitatea de Stat din Moldova, 2016
DOMENII DE INTERES ȘTIINȚIFIC: Algebră, Teoria quasigrupurilor și a buclelor, Combinatorică.
PARTICIPĂRI ÎN PROIECTE ȘTIINȚIFICE NAȚIONALE ȘI INTERNAȚIONALE:
1. Program de Cercetare Instituțională 011302 “ MANSDP” (Metode analitice și numerice de soluționare a problemelor stocastice dinamice decizionale) 2024 – 2027, Universitatea de Stat din Moldova.
2. Aprilie 2023 – Decembrie 2023, Aprilie 2022 – Decembrie 2022, Aprilie 2021 – Decembrie 2021: Programul de Stat 20.80009.5007.25 “Sisteme dinamice multivoce, perturbări singulare, operatori integrali şi structuri algebrice neasociative”
3. Aprilie 2019 – August 2019, Martie 2018 – Mai 2018 : Proiectul 15.817.02.37A “Modele matematice și calcul performant în soluționarea problemelor cu caracter aplicativ”
PARTICIPĂRI CU COMUNICĂRI ÎN MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE NAȚIONALE ȘI INTERNAȚIONALE:
1. The 32th International Conference on Applied and Industrial Mathematics, Bucharest, Romania, 18-21 September, 2025.
2. National conference with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations, State University of Moldova, September 18-19, 2025.
3. International Conference on Quasigroups and Related Systems (ConfQRS 2025), July 2 – 4, 2025, Chișinău, Republic of Moldova.
4. International Conference Mathematics & IT: Research and Education (MITRE– 2025), June 26– 29, 2025, Chișinău, Republic of Moldova.
5. International seminar ”Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics”, organized by School of Informatics from Aristotle University of Thessaloniki, Greece, 21.10.2024
6. International Conference dedicated to the 60th anniversary of the foundation of V. Andrunachievici

Institute of Mathematics and Computer Science, October 10-13, 2024, Chișinău, Republic of Moldova.
7. National conference with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations, State University of Moldova, September 12-13, 2024.
8. The 30th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Iași, Romania, 14 – 17 September, 2023.
9. International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2023), Chișinău, Republic of Moldova, 26 – 29 June, 2023.
10. The 29th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Chișinău, Moldova, 25-27 August, 2022.
11. International Conference "Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2021), dedicated to the 75th anniversary of Moldova State University, 1 –3 July, 2021.
12. The 5th Conference on Mathematical Foundations of Informatics, Iași, Romania, 3 – 6 July, 2019.
13. Three editions of the Mathematical seminar "Automata Theory", organized by Faculty for Mathematics and Computer Science (17.11.2022, 18.11.2021, 4.11.2021)
14. Four editions of the Scientific Seminar dedicated to the memory of V. Belousov, Institute of Mathematics and Computer Science " V. Andrunachievici", Moldova State University (20.02.2026, 23.02.2024, 24.02.2023, 25.02.2022)
15. International discussion, organized by Department of Mathematics from Uppsala University, Sweden, 13.05.2025.

LUCRĂRI ȘTIINȚIFICE ȘI ȘTIINȚIFICO – METODICE PUBLICATE:

3 articole în reviste științifice de specialitate acreditate, 2 articole in culegeri ale conferințelor internaționale de specialitate, 9 rezumate ale comunicărilor la conferințe științifice de specialitate internaționale și naționale, 19 participari la conferințe și seminare științifice de specialitate naționale și internaționale.

a. Articole în reviste științifice de specialitate acreditate:

1. Cuznețov Elena. "On a quasigroup prolongation and its recursive differentiability". Acta et Commentationes Exact and Natural Sciences, vol. 20, no. 2, 2025, pp. 25 – 39.
2. Syrbu Parascovia, Cuznețov Elena. "On recursive 1-differentiability of the quasigroups prolongations". Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat., 2023, No. 2 (101), p. 102-109
3. Syrbu Parascovia, Cuznețov Elena. "On recursively differentiable k-quasigroups". Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat., 2022, No. 2 (99) p. 68 – 75.

b. Articole in culegeri de lucrări ale conferințelor științifice de specialitate

1. Cuznețov Elena "On a method of prolongation of quasigroups", Proceedings of the International Conference dedicated to the 60th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, October 10-13, 2024, Chișinău, Republic of Moldova, p. 55 – 60.
2. Kuznetsov Elena, Kuznetsov Eugene "General Boolean Algebras, Boolean Rings and Extension Algebras", Proceedings of the 5th Conference on Mathematical Foundations of Informatics, Iași, Romania, 3 – 6 July, 2019, p. 181 – 186.

c. Rezumate ale comunicărilor la conferințe științifice de specialitate internaționale și naționale:

1. Cuznețov Elena, Syrbu Parascovia "On a prolongation of quasigroups using two transversals", Abstracts of the 32nd International Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2025), September 18 – 21, 2025, Bucharest, Romania, p. 97 – 98.
2. Cuznețov Elena, "Prolongation and recursive differentiability of quasigroups", Abstracts of the National conference with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations, State University of Moldova, September 18-19, 2025, p. 216.
3. Cuznețov Elena, Syrbu Parascovia "On recursive differentiability of quasigroups prolongations", Abstracts of the International Conference on Quasigroups and Related Systems (ConfQRS 2025), July 2 – 4, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, p. 9 – 10.

4. Cuznețov Elena, Syrbu Parascovia ”On a new quasigroup prolongation and its recursive differentiability”, Abstracts of the International Conference Mathematics & IT: Research and Education (MITRE– 2025), June 26– 29, 2025, Chișinău, Republic of Moldova, p. 15 – 16.
5. Cuznețov Elena „ Recursively differentiable finite quasigroups”, Abstracts of the National conference with international participation: Natural Sciences in the Dialogue of Generations, State University of Moldova, September 12-13, 2024, p. 262.
6. Cuznețov Elena, Syrbu Parascovia "On recursive differentiability of Bruck-Belousov prolongations of quasigroups", Abstracts of the 30th International Conference on Applied and Industrial Mathematics, Iași, Romania, 14 – 17 September, 2023, p. 71.
7. Cuznețov Elena, Syrbu Parascovia ”On recursive differentiability of some quasigroups prolongations”, Abstracts of the International Scientific Conference "Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2023), Chișinău, Republic of Moldova, 26 – 29 June, 2023, p. 22 – 23.
8. Cuznețov Elena, Syrbu Parascovia ”On recursively differentiable n-quasigroups", Abstracts of the 29th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Chișinău, Moldova, 25-27 August, 2022, p. 161 – 163.
9. Cuznețov Elena, Syrbu Parascovia ”On recursively differentiable quasigroups", Abstracts of the International Virtual Conference "Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2021), dedicated to the 75th anniversary of Moldova State University, 1 – 3 July, 2021, p. 47 – 48.

PREMII, MENȚIUNI, DISTINCȚII, TITLURI ONORIFICE:

1. Diplomă a Ministerului Educației și Cercetării al Republicii Moldova, în semn de recunoaștere a aprecierii înalte a calităților profesionale, pentru perseverență și contribuție la creșterea calității educației, precum și pentru implicarea în activități de susținere a elevilor cu performanțe înalte. (Gala Olimpicilor, 17.12.2024)
2. Bursa de excelență a Guvernului pentru studenții – doctoranzi, pe anul 2024 (Hotărîrea Guvernului nr. 221 din 26.03.2024, https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=142539&lang=ro)
3. Premiul ”Acad. V. Andrunachievici" al Institutului de Matematică și Informatică ”Vladimir Andrunachievici" pe anul 2023, pentru cele mai valoroase lucrări științifice
4. MPLAI 2021 Awards. The Prize for contributions to the Algebra of Logic, for the paper *General Boolean Algebras, Boolean Rings and Extension Algebras*, 2021

APARTENENȚĂ LA SOCIETĂȚI / ASOCIAȚII ȘTIINȚIFICE NAȚIONALE ȘI INTERNAȚIONALE:

1. Membru ROMAI (The Romanian Society of Applied and Industrial Mathematics), Septembrie 2023 – prezent.

ACTIVITĂȚI ÎN CADRUL COLEGIILOR DE REDACȚIE ALE REVISTELOR ȘTIINȚIFICE:

Membru al colegiului de redacție a revistei ”Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica" (https://www.math.md/publications/basm/editorial-board/)

CUNOAȘTEREA LIMBILOR:

Limbi materne: Româna, Rusa
Alte limbi:

	ÎNȚELEGERE		VORBIRE		Scriere
	Ascultare	Citire	Interacțiunea vorbită	Producție vorbită	
Engleză	B2	B2	B2	B2	B2
Franceză	B1	B1	A2	A2	A2
Italiană	B2	B2	B2	B2	B2
Germană	A1	A1	A1	A1	A1

DATE DE CONTACT DE SERVICIU:

Adresa: Str. I. Pelivan 13 – 55, Chișinău, MD – 2064, Moldova
Telefon: +373 22745640, +373 68353753
Email: lenkacuznetova95@gmail.com